5.1 (a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 3 \\ ax_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Obs det kvadratiskt system

Ekvssystem matris $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Lös ekv: $\det A = 0$ m a p a.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(4a-2) - 1(4-2a) + a(1-a^2) =$$

$$= 4a - 2 - 4 + 2a + a - a^3 = -a^3 + 7a - 6 = 0$$

eller $a^3 - 7a + 6 = 0$ Obs $a_1 = 1$ är en lsg

till ekv. Vidare $V.L. = (a^3 - a) - 6(a-1) =$

$= (a-1)(a^2 + a - 6) = (a-1)(a+3)(a-2)$

$a_2 = -3$, $a_3 = 2$ är två lsgar till.

$\Rightarrow$ Om $a \neq -3, 1, 2$ så har systemet exakt en lsg

Fall $a = -3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \emptyset$$

inga lsgar

Fall $a=1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 1&1&2&3\\ 1&1&4&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&0&1&2\\ 0&0&3&-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&-7 \end{array}\right]$ $\underset{\neq 0}{}$

$\sim \emptyset$ inga lösningar

Fall $a=2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&1\\ 1&2&2&3\\ 2&1&4&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&1\\ 0&1&0&2\\ 0&-1&0&-2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&2&1\\ 0&1&0&2\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$

en parameter lsg.

(b) För $a=2$ har vi $\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = 2 \\ x_1 = -2-2t+1 \end{cases}$ eller

$$\begin{cases} x_1 = -1-2t \\ x_2 = 2 \\ x_3 = t, \quad t \in R \end{cases}$$

(en rät linje i R^3).

5.4 $\begin{cases} a_1 x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + a x_3 = -a \\ a x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ Obs ett kvadratiskt system

Ekvssystem matris $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lös ekv $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a(a-2) + (a-2)$$

$= (a-2)(a+1) = 0$ $\quad a_1 = 2,\ a_2 = -1$ är lsgar.

(a) Om $a \neq -1, 2$ har systemet exakt en lsg.

(b) Fall $a = 2$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{-3}} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

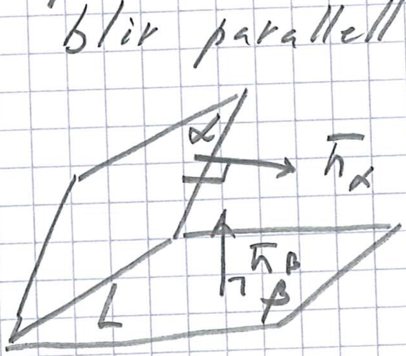
$\sim \emptyset$ (inga lsgar)

Fall $a = -1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$ (en parameter lsg)

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = -t + 1 \\ x_1 = (-t+1) + 2t - 1 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t + 1 \\ x_3 = t, \quad t \in R \end{cases}$$

5.6 Bestäm $\underline{\underline{a}}$ s.a. skärningslinjen mellan planen $2x + ay - z - 3 = 0$ o $x - 2y + az - 5 = 0$ blir parallell med planet $2x + y + z - 2 = 0$



α: $2x + ay - z - 3 = 0$

$\bar{n}_\alpha (2, a, -1) \perp \alpha$

β: $x - 2y + az - 5 = 0$

$\bar{n}_\beta (1, -2, a) \perp \beta$

Obs $L \perp \bar{n}_\alpha, \bar{n}_\beta \Rightarrow L \parallel \bar{n}_\alpha \times \bar{n}_\beta$

$\gamma: \quad 2x+y+z-2=0$ <u>Obs</u> $\quad \bar{n}_\alpha \times \bar{n}_\beta \perp \bar{n}_\gamma$

$\bar{n}_\gamma(2,1,1) \perp \gamma.$ $\Leftrightarrow (\bar{n}_\alpha \times \bar{n}_\beta)\cdot \bar{n}_\gamma = 0$

<u>Räkna</u>: $\quad \bar{n}_\alpha \times \bar{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2 \\ -(2a+1) \\ -4-a \end{pmatrix}$

$(\bar{n}_\alpha \times \bar{n}_\beta)\cdot \bar{n}_\gamma = 2(a^2-2)-(2a+1)-4-a =$

$= \underbrace{2a^2-3a-9=0}$ $\quad a_1 = 3, \; a_2 = -3/2$

<u>Obs</u> För $a_1 = 3$ $\quad \bar{n}_\alpha(2,3,-1)$ $\quad \underline{o} \quad \bar{n}_\alpha \not\parallel \bar{n}_\beta$

$\bar{n}_\beta(1,-2,3)$

För $a_2 = -3/2$ $\quad \bar{n}_\alpha(2,-3/2,-1)$ $\quad \underline{o} \quad \bar{n}_\alpha \not\parallel \bar{n}_\beta$

$\bar{n}_\beta(1,-2,-3/2)$

<u>5.10</u>. (a) Visa att det finns en vektor

$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$ s.a. $A\bar{X} = 4\bar{X}$, där $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$A\bar{X} = 4\bar{X} \Leftrightarrow A\bar{X} - 4\bar{X} = \bar{0}$ eller $(A-4E)\bar{X} = \bar{0}$

<u>Obs</u> $\quad A-4E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{o} \quad \det(A-4E) = 0 \Rightarrow$

det finns icke-triviala lsgar $\bar{X}$.

(b) $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \end{array}$ $\quad \begin{cases} x_1 = -t/2 \\ x_2 = t, \quad t \in R \end{cases}$

(c) Betrakta ekv $|A-\lambda E|=0$

eller $\begin{vmatrix} (8-\lambda) & 2 \\ 2 & (5-\lambda) \end{vmatrix}=0 \iff \lambda^2-13\lambda+36=0$

$\lambda_1=4, \quad \lambda_2=9.$

Alla vektorer som satisfierar ekv

$A\bar{X}=9\bar{X} \iff \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in R$

5.16 Visa att ekv för ett plan genom punkterna (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) kan skrivas av formen

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

Obs (1) $(*)$ är en ekv av typ $Ax+By+Cz+D=0$

(2) om man sätter in en av punkterna i ekvationen så får det 2 likadana rader.

d v s punkterna satisfierar ekvationen.

__5.22__ Undersök om vektorer är linjärt beroende.

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

__Obs__ Vi har tre tre-dimensionella vektorer.

Kolla $\det\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 2\\0 & 3 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\3 & 1\end{vmatrix} =$

$= (1-6) - 2(-2-3) = -5+10 = 5 \neq 0 \Rightarrow$

vektorerna är linjärt oberoende.

(b) $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$. Betrakta ekv $x_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\3 & 4 & 0\\\cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0}\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\3 & 4 & 0\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cc}x_1 & x_2\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\0 & -2 & 0\end{array}\right]\end{array} \sim$ $x_2 = 0$, $x_1 = 0$

exakt en lsg

$\Rightarrow$ vektorerna är lin. oberoende.

(c) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

__Obs__ __fyra__ __tre__-dimensionella vektorer

$\Rightarrow$ vektorerna är linjärt beroende.

__5.23__ $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ Bildar vektorerna en bas i rummet?

Beräkna $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$

$+ 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (6-1) - 2(4-3) + 3(2-9) = 5 - 2 - 21 =$

$= -18 \neq 0 \Rightarrow$ vektorerna bildar en bas.

5.27. Vektorerna $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ är linjärt oberoende. Är vektorerna $\bar{d} = \bar{a} + 3\bar{b} + 3\bar{c}$, $\bar{e} = 2\bar{a} - \bar{b} - 8\bar{c}$, $\bar{f} = -\bar{a} + 2\bar{b} + 7\bar{c}$ lin. oberoende eller beroende?

Betrakta ekvationen: $x_1\bar{d} + x_2\bar{e} + x_3\bar{f} = \bar{0}$ $(*)$

Obs $(*) \Leftrightarrow x_1(\bar{a} + 3\bar{b} + 3\bar{c}) + x_2(2\bar{a} - \bar{b} - 8\bar{c}) +$

$+ x_3(-\bar{a} + 2\bar{b} + 7\bar{c}) = \bar{0}$ eller

$(x_1 + 2x_2 - x_3)\bar{a} + (3x_1 - x_2 + 2x_3)\bar{b} + (3x_1 - 8x_2 + 7x_3)\bar{c} = \bar{0}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$ (ty $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ är linjärt oberoende.)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -8 & 7 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 0 \end{array}\right] \times(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

en parameter lösning $\Rightarrow$ $(*)$ har icke-triviala lösningar $\Rightarrow$ $\bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ är linjärt beroende.

5.30

(a) Visa att de fyra vektorerna nedan utgör en bas i R^4!

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obs det räcker att visa att vektorerna är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ $\det[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4] \neq 0$

Räkna!

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

(b) Bestäm koordinaterna för $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$,

Lös ekvationen $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 + x_4\bar{a}_4 = \bar{v}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \times -2, -3, -4 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2, -3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \underline{x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

5.31 (a) Visa att vektorerna nedan utgör en ON-bas i R^4:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \bar{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Obs 1) $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = |\bar{e}_4| = 1$ $\quad (\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = 1)$

2) $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$ för alla $i \neq j$. $\Rightarrow$

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ är linjärt oberoende (varför?)

3) 2) medför att $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ utgör en bas i R^4

$\Rightarrow$ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ är en ON bas i R^4.

(b) Bestäm koordinaterna för $\bar{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\0\end{pmatrix}$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$,

Lös ekvationen $x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4 = \bar{v}$

Använd skalärprodukt:

$$\bar{v} \cdot \bar{e}_1 = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4) \cdot \bar{e}_1 = x_1$$

$\| \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 0$, $\quad \bar{v} \cdot \bar{e}_2 = x_2 = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 + 0) =$

$= 3$, $\quad \bar{v} \cdot \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-3) = -\frac{3}{\sqrt{2}} = x_3$, $\quad \bar{v} \cdot \bar{e}_4 = x_4 =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1 \cdot 2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$