6.1 (c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ <u>Obs</u> $\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow$

A är inverterbar

(d) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <u>Obs</u> $\det B = 0 \Rightarrow$

B är inte inverterbar.

6.6 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Finn A^{-1};

<u>Till ex.</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim [E \mid A^{-1}]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\tan\theta & 0 & \frac{1}{\cos\theta} & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times(-\sin\theta) \sim$$

(Anta att $\cos\theta \neq 0$)

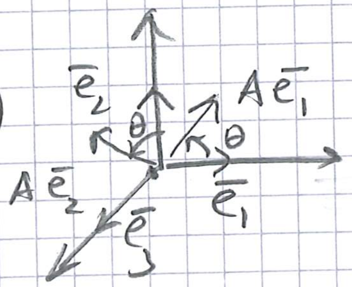
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\tan\theta & 0 & \frac{1}{\cos\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos\theta} & 0 & -\tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \cos\theta \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\tan\theta & 0 & \frac{1}{\cos\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \times \tan\theta \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{E}{\shortparallel} \qquad\qquad \underset{A^{-1}}{\shortparallel}$$

(b)



<u>Obs</u> $A\bar{e}_3 = \bar{e}_3$

$A \sim$ en rotation av R^3

Kring x_3-axeln vinkeln θ.

$A^{-1} \sim$ en rotation av R^3

Kring x_3-axeln vinkeln $-\theta$ ty

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>6.7</u>(a) Visa att $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ är invers till

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. <u>Obs</u> det räcker att visa

$AB = E$ (eller $BA = E$).

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Visa att om $\det A \neq 0$ så är

$$B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$ invers till $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Obs $\det A = ad - bc \neq 0$

Räkna $B \cdot A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.9 (a) Bestäm $(AB)^{-1}$ om

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ genom att först

bestämma AB.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$(AB)^{-1} = \Big|$ Obs $\det AB = 5 \neq 0 \Big| =$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.11 A, B är inverterbara o $AB = BA$ (*). Visa att

(a) $A^{-1}B = BA^{-1}$.

Obs (*) $\Rightarrow$ $(AB)A^{-1} = (BA)A^{-1} = B$

$$V.L. = A^{-1}B = A^{-1}(ABA^{-1}) = \underbrace{(A^{-1}A)}_{E} BA^{-1} = BA^{-1} = H.L.$$

(8) $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Obs 1) $AB = BA \Rightarrow A = (BA)B^{-1} \Rightarrow E = BAB^{-1}A^{-1}$

2) $V.L. = A^{-1}B^{-1} = A^{-1}B^{-1}E = A^{-1}\underbrace{B^{-1}B}_{E}\overbrace{AB^{-1}A^{-1}}^{E} =$

$= EB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1} = H.L.$

6.17 A är kvadratisk o $A^2 + 2A + E = 0$

Visa att A är inverterbar. o bestäm A^{-1}.

Obs 1) det räcker att hitta C så den att $AC = E$ (eller $C \cdot A = E$). Då är $C = A^{-1}$.

2) $A^2 + 2A + E = 0 \Leftrightarrow A\underbrace{(-A - 2E)}_{C} = E$

6.26 $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

(a) Beräkna $|A\bar{x}| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3), x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3)\right)\right| =$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = |\bar{x}|$

$\Rightarrow$ Avbildningen bevarar längden

$(A\bar{x}) \cdot (A\bar{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3), x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3)\right) \cdot$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_3), y_2, \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2)\right) = \frac{1}{2}(x_1 - x_3)(y_1 - y_3) +$

$x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1+x_3)(y_1+y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

$= \bar{x}\cdot\bar{y}$

$\Rightarrow$ Avbildningen bevarar skalärprodukter.

b) Visa att A är en ON matris genom att använda Sats 6.3.

Beräkna $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Kolonnvektorerna är ortonormerade.

6.27. Är följande matriser ON matriser?

(a) $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = M_a$ Obs $M_a^t \cdot M_a =$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Kolonnvektorerna är ortonormerade $\Rightarrow$

M_a är en ON matris

(b) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \frac{1}{2} & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}}_{\bar{K}_1 \quad \cdots \quad \bar{K}_4} = M_b$

Obs $\bar{K}_1 \cdot \bar{K}_4 =$

$= 1/4 - 1/4 - 1/4 - 1/4 = -1/2 \neq 0$

$\Rightarrow M_b$ är ingen ON matris

(c)

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \sin\theta & -\sin\varphi \\ \sin\varphi \cos\theta & \sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} = M_c$$

$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{array}$$

Obs $M_c^t \cdot M_c = E \Rightarrow M_c$ är en ON matris

6.33 Bestäm inversen till följande matriser.

(a) $$M_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Obs $M_a^t \cdot M_a = E \Rightarrow M_a$ är en ON matris

bl.a. $$M_a^t = M_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = M_a$$

(b) $$M_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \bar{k}_1 \end{array}$$

Obs $|\bar{k}_1|^2 = 4 \neq 1$

$\Rightarrow M_b$ är ingen ON-matris.