$\underline{7.3}$

Antag att $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A $\underline{o}$ bestäm motsvarande egenvärde.

Vi skall kontrollera likheten $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ för något värde λ.

(a) $A \cdot \underset{\bar{a}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\textcircled{2}\,\bar{a}}}$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ är en egenvektor med egenvärde 2

(b) $A \cdot \underset{\bar{b}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \underline{\underline{2}} \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\bar{b}$ är ingen egenvektor.

(c) $A \cdot \underset{\bar{c}}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{(-1) \cdot \bar{c}}}$ $\Rightarrow$ $\bar{c}$ är egenvektor med egenvärde -1

$\underline{7.6}$

Antag att A har egenvektor $\bar{v}$ med egenvärde λ (d v s $A\bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$). Visa att då är $\bar{v}$ också egenvektor till matriserna

(a) $\underline{A^2}$:

$$A^2\bar{v} = A(A\bar{v}) = \overset{\curvearrowleft}{A(\lambda}\bar{v}) = \lambda \cdot A\bar{v} =$$
$$= \lambda(\lambda\bar{v}) = \underline{\lambda^2 \cdot \bar{v}}$$

$\Rightarrow$ $\bar{v}$ är en egenvektor till A^2 med egenvärde λ^2.

(b) $(A-2E)\bar{v} = A\bar{v} - 2E\bar{v} = \lambda\bar{v} - 2\bar{v} = \underline{(\lambda-2)\cdot\bar{v}}$

$\Rightarrow$ $\bar{v}$ är en egenvektor till $A-2E$ med egenvärde $\lambda-2$

(c) $(A^2+E)\bar{v} = A^2\bar{v} + E\bar{v} = \lambda^2\cdot\bar{v} + 1\cdot\bar{v} = \underline{(\lambda^2+1)\cdot\bar{v}}$

$\Rightarrow$ $\bar{v}$ är en egenvektor till A^2+E med egenvärde λ^2+1.

<u>7.7</u>. A är sådan att $A^2=A$

Visa att de enda möjliga egenvärdena är 0 <u>o</u> 1.

Låt $\bar{v}$ vara egenvektor till A med egenvärde λ: Då är $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ (*), dessutom

$$A^2v = \lambda^2 v$$

$$\Rightarrow \lambda\bar{v} = \lambda^2\bar{v} \Leftrightarrow (\lambda-\lambda^2)\underset{\neq 0}{\bar{v}} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda-\lambda^2=0$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1.$$

<u>Ex.</u> (i) O (en kvadratisk nollmatris)

$$O^2=O \quad \underline{o} \quad O\cdot\underset{\neq 0}{\bar{v}} = \underline{\underline{0}}\cdot\bar{v}. \quad (\text{Egenvärde } \underline{0})$$

(ii) $E^2=E$ <u>o</u> $E\cdot\bar{v} = 1\cdot\bar{v}$ (Egenvärde <u>1</u>)

(iii) $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ <u>obs</u> $A^2=A$ <u>o</u> $A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \underline{\underline{=}} 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\underline{\underline{0}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ 1 o 0 är egenvärde.

<u>7.9.</u> Antag att P är en ON matris.

Visa att om λ är ett egenvärde till P så gäller $\lambda=1$ eller $\lambda=-1$.

Låt $\bar{v}$ vara en egenvektor till P med egenvärde λ. Då är $P.\bar{v}=\lambda.\bar{v}$ $(*)$

Repetera att $|P.\bar{v}|=|\bar{v}|$ så är (se $*$)

$|\lambda.\bar{v}|=|\bar{v}| \Leftrightarrow |\lambda|\cdot|\bar{v}|-|\bar{v}|=0$ eller

$(|\lambda|-1)\cdot|\bar{v}|=0$ (ty $|\bar{v}|\neq 0$) $\Leftrightarrow$ $|\lambda|-1=0 \Leftrightarrow$

$\lambda=1$ eller $\lambda=-1$.

<u>7.13</u> Bestäm alla egenvektorer o egenvärde till

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Starta med ekv $|A-\lambda E|=0$ eller

$$\begin{vmatrix}(2-\lambda) & -1 & -1\\ 0 & (-1-\lambda) & 0\\ 0 & 2 & (1-\lambda)\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}(-1-\lambda) & 0\\ 2 & (1-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)=0$ Så är $\lambda=-1, 1, 2$ är egenvärde till A.

Egenvektorer:

$\lambda_1 = -1$: lös ekv $(A-(-1)E)X=0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \sim$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = -t \\ x_1 = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t = 0 \end{cases}$$

eller $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

är egenvektorer som svarar mot egenvärde $\lambda_1 = -1$.

$\lambda_2 = 1$: lös ekv $(A - 1 \cdot E)X = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \sim$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = 0 \\ x_1 = t \end{cases}$$

eller $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

är egenvektorer som svarar mot egenvärde $\lambda_2 = 1$.

$\lambda_3 = 2$: lös ekv $(A - 2 \cdot E)X = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

är egenvektorer som svarar mot genvärde $\lambda_3 = 2$.

7.14

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad |A_1 - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

eller $(\lambda-3)^2 + 1 = 0$ eller $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

<u>Obs</u> Ekv saknar reella rötter

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad |A_2 - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & -1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$ eller $(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right) = 0$

<u>Obs</u> det finns bara <u>en</u> reell rot <u>$\lambda = 1$</u>.

<u>Egenvärde</u>: Lös ekv $(A_2 - 1 \cdot E)X = 0$ eller

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = t \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \neq 0$$

$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad |A_5 - \lambda E| = 0 \iff \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 0 \\ -1 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$

$\iff (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$ eller $(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2$ (dubbelrot)

Egenvektorer:

$\lambda_1 = 0$: lös ekv $(A_5 - 0 \cdot E)X = 0$ eller

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} ① & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ① & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_1 = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$$

$\lambda_2 = 2$: lös ekv $(A_5 - 2 \cdot E)X = 0$ eller

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} ① & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = s \\ x_1 = -s \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

där s, t kan inte samtidigt vara nollor.

7.16 Bestäm tre ortogonala egenvektorer till B

(b) $$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{uppg. } 7.14, A_5)$$

Obs B är symmetrisk => egenvektorer som svarar mot olika egenvärde är ortogonala. (*)

Välj som $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notera att $\bar{a} \perp \bar{b}$, $\bar{a} \perp \bar{c}$, $\bar{b} \perp \bar{c}$

o $\bar{c}$ är egenvektor som svarar mot genvärde $\lambda_2 = 2$.

7.22 $$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla genvärde o egenvektorer till A.

Obs 1) $$3A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B.$$

2) Om $B = k \cdot A$ o $A\bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, så

är $B\bar{v} = (kA)\bar{v} = (k \cdot \lambda) \cdot \bar{v} \quad \Rightarrow$

A, B har samma egenvektorer $\underline{0}$

om λ är egenvärde för A så är $k\cdot\lambda$

egenvärde för B.

Lös problemet för B: $|B-\mu\cdot E|=0$

$$\begin{vmatrix} (-1-\mu) & 2 & -2 \\ 2 & (2-\mu) & 1 \\ -2 & 1 & (2-\mu) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{eller}$$

$$\begin{vmatrix} (-1-\mu) & 2 & 0 \\ 2 & (2-\mu) & (3-\mu) \\ -2 & 1 & (3-\mu) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\mu)\cdot\begin{vmatrix} (-1-\mu) & 2 & 0 \\ 2 & (2-\mu) & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\mu)\begin{vmatrix} (-1-\mu) & 2 & 0 \\ 4 & (1-\mu) & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\mu)\cdot\begin{vmatrix} (-1-\mu) & 2 \\ 4 & (1-\mu) \end{vmatrix} = 0$$

eller $(3-\mu)(\mu^2-9)=0$ $\qquad$ $\mu_1=-3$ (enkelrot)

$\mu_2 = 3$ (dubbelrot.)

<u>Egenvektorer!</u>

<u>$\mu_1=-3$</u>:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$$

$\underline{\mu_2 = 3}$:
$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & |\ 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

t, s kan inte vara nollor samtidigt.

<u>Sammanfatta för A:</u>

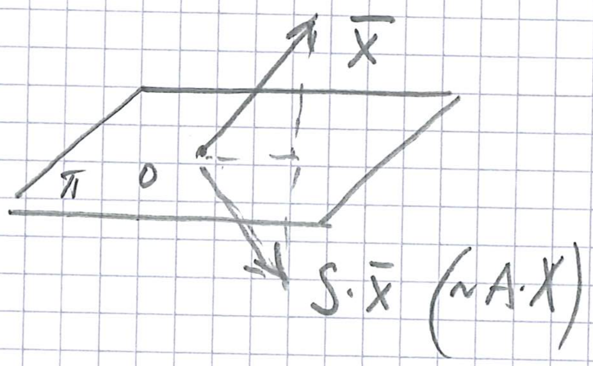
egenvärde är -1 o 1 med motsvarande egenvektorer $t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0,$ o $t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

t, s kan inte vara nollor samtidigt.

(b) <u>Obs</u> A är spegling i ett plan π

(det är givet)

Finn π's ekvation:



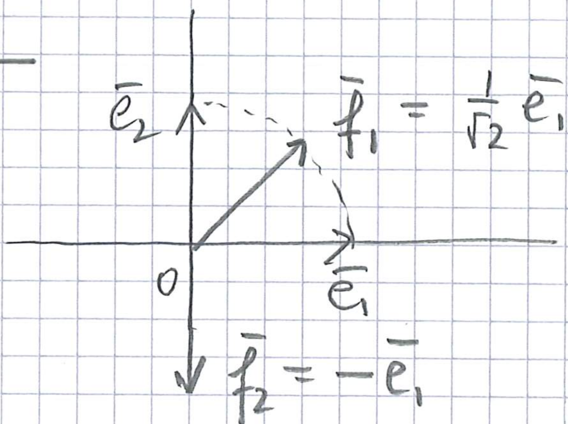
Notera att vektorn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \pi \Rightarrow$$

π's ekvation är

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

8.2



$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2$

$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1$

Obs $(\bar{f}_1\ \bar{f}_2) = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$y_1\bar{f}_1 + y_2\bar{f}_2 = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{2}\,x_2 \\ y_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

8.4

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \\ \bar{f}_2 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_3 \\ \bar{f}_3 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{cases}$$

eller

$(\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3) = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)\cdot T,$

där $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(a) $\bar{v} = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$. Bestäm $\bar{v}$'s koordinater i basen $(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$

Obs $\bar{v} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)\cdot \underbrace{T\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}}_{\text{vad vi söker}}$

$$\Rightarrow T\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&-1\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-6\\-4\\7\end{pmatrix}}$$

är $\bar{v}$'s koordinater i $(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)$

(b) $\bar{u} = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Bestäm $\bar{u}$'s koordinater i basen $(\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3)$

Obs $(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3) = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3)\cdot T^{-1}$

$\Rightarrow \bar{u} = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3)\cdot \underbrace{T^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\text{vad vi söker}}$

$T^{-1} = ?$: $[T\,|\,E] \longrightarrow [E\,|\,T^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\2&0&-1&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-2,-3\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-4&1&-2&1&0\\0&-5&5&-3&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ \leftarrow\\ -1\end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 5 \\ \lrcorner \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right]_{\times -\frac{1}{15}} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{15} \end{array}\right]_{\times 4,1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{13}{15} & -\frac{5}{15} & 4/15 \\ 0 & 1 & 0 & 7/15 & -\frac{5}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{15} & -\frac{5}{15} & \frac{4}{15} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/15 & 5/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 0 & 7/15 & -5/15 & 1/15 \\ 0 & 0 & 1 & -2/15 & -5/15 & 4/15 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ är}$$

$\overset{''}{T^{-1}}$

koordinater av $\bar{u}$ i
basen $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$

<u>8.6</u> <u>Obs</u> Sätt $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Baserna $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3$ $\underline{o}$ $\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3$ är ON baser i R^3.

Notera att $(\bar{f}_1, \bar{f}_2 \bar{f}_3) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{o}$ T är en ON matris $\Rightarrow$ $\underset{T}{''}$

$T^{-1} = T^t$,

$$\bar{v} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3) \cdot \underbrace{T^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{vad vi söker}}$$

Räkna $T^{t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ är koordinater av $\bar{v}$ i basen $(\bar{f}_1 \bar{f}_2 \bar{f}_3)$.

8.8 Avbildnings matrisen

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$ i standardbasen $(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Bestäm avbildnings matrisen i basen $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$

Obs $\underbrace{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)}_{F} = \underbrace{(\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)}_{\mathcal{E}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}}_{T}$

Notera att $\mathcal{E}AX = FBX' = \mathcal{E}\underbrace{TBT^{-1}}_{A}X$

$\Rightarrow B = T^{-1}AT$ (förändrings formel)

(i) $T^{-1} = ?$ $[T|E] \longrightarrow [E|T^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \times(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \times -2, -4 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \times(-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{T^{-1}}$$

$$B = \underset{\overset{\shortparallel}{T^{-1}}}{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}} \underset{\overset{\shortparallel}{T}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -4 & 10 \\ 4 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 14 \\ -2 & -4 & -14 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

8.12 (a) Bestäm P (inverterbar) o D (diagonal)

s.a. $P^{-1}AP = D$ om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Obs $AP = PD \Rightarrow P$ består av egenvektorer till A o D av egenvärde.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1.$$

$\lambda_1 = 3$: $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline \textcircled{1} & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \underset{= \bar{q}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}},\ t \neq 0$

$\lambda_2 = -1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline \textcircled{1} & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \underset{= \bar{q}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}},\ t \neq 0$

Obs $\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 = 0 \iff \bar{q}_1 \perp \bar{q}_2$

Normera $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \Rightarrow \bar{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \bar{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Inför $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$. Då är $D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

Notera att P är en ON bas.

(b) Beräkna A^2, A^3, A^{100}.

Obs $A = PDP^{-1} = PDP^t$ ty $P^{-1} = P^t$

$$A^2 = PD^2P^t, \quad A^3 = PD^3P^t, \quad A^{100} = PD^{100}P^t \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^2 & 0\\0 & (-1)^2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^2 & (-1)^2\\3^2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & 8\\8 & 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^k & 0\\0 & (-1)^k\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^k & (-1)^k\\3^k & (-1)^{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(3^k + (-1)^k) & (3^k + (-1)^{k+1})\\(3^k + (-1)^{k+1}) & (3^k + (-1)^k)\end{pmatrix}$$

8.13 Bestäm en ON matris P o en diagonal matris $\mathcal{D}$ s.a. $P^t A P = \mathcal{D}$ då

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Obs $AP = P\mathcal{D}$

$$|A - \lambda E| = 0 \iff \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (8-\lambda) & 4 \\ 0 & 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 10.$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t \neq 0$

$\lambda_2 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]_{\times -2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]^{\times 4} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$\lambda_3 = 10$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Välj $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (en ON matris)

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ (en diagonalmatris) $\underline{o}$

$$\underline{A = PDP^t}$$

(6) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 4 & -2 \\ 4 & (-1-\lambda) & 2 \\ -2 & 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \times 1 \\ \end{matrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & (3-\lambda) & 0 \\ 4 & (-1-\lambda) & 2 \\ -2 & 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda) \begin{vmatrix} \overset{-1}{1} & \overset{\downarrow}{1} & 0 \\ 4 & (-1-\lambda) & 2 \\ -2 & 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & (-5-\lambda) & 2 \\ -2 & 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 18) = 0$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -6$
(dubbelrot) (enkelrot)

$\underline{\lambda_1 = 3}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-t/2\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$, s,t är inte nollor samtidigt.

$\underline{\lambda_2 = -6}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & -2 & 0\\4 & 5 & 2 & 0\\-2 & 2 & 8 & 0\end{array}\right] \begin{array}{c}\leftarrow\\ \times(-1)\\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -4 & 0\\4 & 5 & 2 & 0\\ \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{0}\end{array}\right] \begin{array}{c}\times(-4)\\ \hookleftarrow\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -4 & 0\\0 & 9 & 18 & 0\end{array}\right] \sim \begin{array}{cccc}x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & -1 & -4 & 0\\0 & \textcircled{1} & 2 & 0\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad t \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{p}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad \overline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \overline{p}_3 = \overline{p}_1 \times \overline{p}_2 =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Obs}}$ $\overline{p}_1 \, \overline{p}_2 \, \overline{p}_3$ är en ON bas bestående av egenvektorer. $\Rightarrow$

$$P = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 3 & -1\\-2\sqrt{2} & 3 & 1\\\sqrt{2} & 0 & 4\end{bmatrix} \quad \underline{o} \quad D = \begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

är en ON matris är en diagonal matris

8.14 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ 4 & 7 & a(a+1) \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(a) För vilka värden på a är A diagonaliserbar m h a en ON matris P?

$A = PDP^t$

Obs A måste vara symmetrisk. dvs $a=0$

(b) För vilka värden på a är A diagonaliserbar? Vi behöver en bas av egenvektorer.

$$|A-\lambda E| = 0 \iff \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 4 & a \\ 4 & (7-\lambda) & a(a+1) \\ 0 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (-1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda - 9) = 0 \qquad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 9$$

(dubbelrot) (enkelrot)

$\lambda_1 = -1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a(a+1) & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 0 \\ 4 & 8 & a(a+1) & 0 \end{array}\right] \overset{\times(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} ① & 2 & a/2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2-a) & 0 \end{array}\right]$$

Notera att det finns en bas bestående av egenvektorer $\iff a^2 - a = 0$ dvs $a=0$ eller $a=1$.