1.69 Avgör vilka av följande punkter som ligger på linjen L

$$L: \begin{cases} x = 7 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \quad (*)$$

(a) $P_1(7,0)$. Sätt in P_1 i $(*)$

$$\begin{cases} 7 = 7 - t & \Rightarrow t = 0 \\ 0 = -1 + 2t & \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow P_1 \text{ ligger } \underline{\text{ej}} \text{ på } L.$$

(b) $P_2(6,1)$: $\begin{cases} 6 = 7 - t & \Rightarrow t = 1 \\ 1 = -1 + 2t & \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow P_2$ ligger på L.

1.70 $L: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$ (en rät linje)

Avgör vilken av ekvationerna a) – c) som är en annan parameterframställning av L.

a) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \end{cases}$ L_a b) $\begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \end{cases}$ L_b c) $\begin{cases} x = 15 - 17t \\ y = -8 + 17t \end{cases}$ L_c

Obs 1) $P(2,5) \in L$ o $\bar{v}(1,-1) \parallel L$

2) $\bar{v}_a(1,1) \parallel L_a$ men $\bar{v}_a \nparallel \bar{v} \Rightarrow L_a \nparallel L \Rightarrow L_a \neq L$.

3) $\bar{v}_b(1,-1) \parallel L_b$ o $\bar{v}_b = \bar{v} \Rightarrow L \parallel L_b$.

Sätt in P i L_b:

$$\begin{cases} 2 = t \\ 5 = 6 - t \Rightarrow t = 1 \end{cases} \quad 2 \neq 1 \Rightarrow P \notin L_b \Rightarrow L \neq L_b$$

4) $\bar{v}_c(-17, 17) \parallel L_c$ $\underline{\text{o}}$ $\bar{v}_c \parallel \bar{v} \Rightarrow L \parallel L_c$

Sätt in P i L_c:

$$\left.\begin{cases} 2 = 15 - 17t \Rightarrow t = \frac{13}{17} \\ 5 = -8 + 17t \Rightarrow t = \frac{13}{17} \end{cases}\right] \Rightarrow P \in L_c$$

$\Rightarrow L = L_c$.

<u>1.72</u> Skriv på parameterfri form

(a) $L: \begin{cases} x = 1 - t & (1) \\ y = 3 + 5t & (2) \end{cases}$ (en rät linje)

$(1) \Rightarrow t = 1 - x \xrightarrow{\quad} (2)$: $y = 3 + 5(1 - x)$ eller

$L: 5x + y - 8 = 0$ <u>Obs</u> $\bar{v}(-1, 5) \parallel L$ $\bar{\text{o}}$

$\bar{n}(5, 1) \perp L$

<u>1.73 (a)</u> Skriv på parameterform

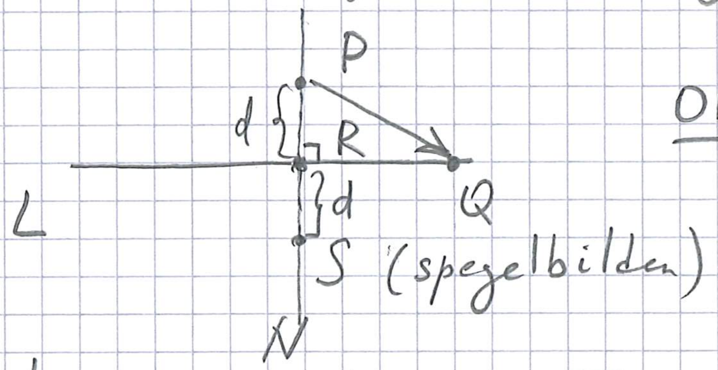
$L: x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{-x-5}{2}$, $x = -2y - 5$

$L: \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$ eller $\begin{cases} x = -5 - 2s \\ y = s \end{cases}$

1.78. Bestäm spegelbilden av punkten

$P(1,1)$ i linjen $L: 3x+y-2=0$

Rita!



Obs $P \notin L$ ty

$3\cdot 1+1-2=2\neq 0$

Planera! Om vi hittar $\overline{PS}$ så är $S=P+\overline{PS}$

Notera att $\overline{PS}=2\overline{PR}$ där $\overline{PR}=R-P$

Så behöver vi R eller $\overline{PR}$ för S.

Ett sätt att hitta $\overline{PR}$:

Obs 1) $\overline{n}(3,1) \perp L$

2) $Q(0,2)\in L$ & $\overline{PQ}=Q-P=(-1,1)$

3) $\overline{PR}=proj_{\overline{n}}\overline{PQ}=\dfrac{\overline{PQ}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\cdot\overline{n}=$

$=\dfrac{3\cdot(-1)+1\cdot 1}{3^2+1^2}\cdot(3,1)=-\frac{1}{5}(3,1)$

$\Rightarrow \overline{PS}=2\cdot\overline{PR}=-\frac{2}{5}(3,1) \Rightarrow S=(1,1)-\frac{2}{5}(3,1)=$

$=\left(-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$

Ett sätt att hitta R:

Betrakta $N: \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+t \end{cases}$ (en rät linje) $\perp L$

& $P\in N$

Sätt in ekv av N i L:

$$3(1+3t)+(1+t)-2=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{5}$$

(värdet på t som svarar mot R)

Finn R:

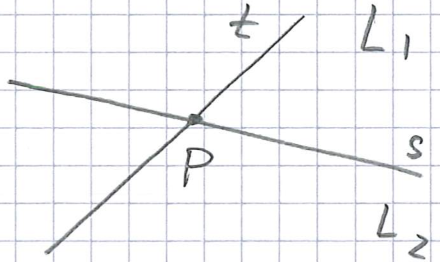
$$\left.\begin{array}{l} x=1+3\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5} \\ y=1+\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5} \end{array}\right| \Rightarrow R\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$$

Finn $\overline{PR}=R-P=\left(\frac{2}{5}-1,\frac{4}{5}-1\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$

1.83 Bestäm den eventuella skärningspunkten mellan linjerna

(a) $L_1:\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$ o $L_2:\begin{cases} x=-2+s \\ y=5-s \\ z=-5+2s \end{cases}$

(Obs! vi byter t mot s)



$$P:\left.\begin{cases} t=-2+s & (1) \\ 1+t=5-s & (2) \\ 2-t=-5+2s & (3) \end{cases}\right] \Rightarrow t=1 \text{ o } s=3$$

↓ sätt in i (3)

$2-1=-5+2\cdot3$ o.k

$\Rightarrow$ P finns o har koordinater $\begin{cases} 1 = -2+3=1 \\ 1+1=5-3=2 \\ 2-1=-5+2\cdot3=1 \end{cases}$

$\Rightarrow P(1,2,1)$

1.83 (b) På samma vis som a)

$L_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 2-t \end{cases}$ o $L_2: \begin{cases} x = 3+2s \\ y = 2-s \\ z = 1-s \end{cases}$

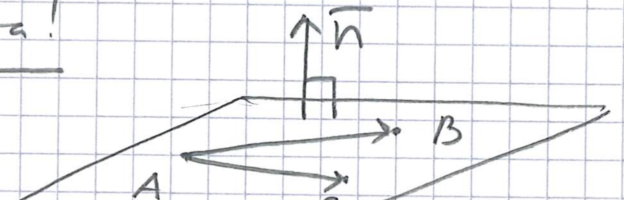
$P: \begin{cases} t = 3+2s & (1) \\ 1+t = 2-s & (2) \\ 2-t = 1-s & (3) \end{cases} \Rightarrow \underline{s=0 \text{ o } t=1}$

$\downarrow (1): \; 1 \neq 3+2\cdot 0.$

$\Rightarrow$ P existerar ej. dvs L_1 o L_2 har ingen gemensam punkt.

1.87 Bestäm ekv för planet som går genom punkterna $(1,2,3)$, $(1,1,1)$ o $(2,-1,0)$
A B C

Rita!



Finn $\overline{AB} = B - A = (0,-1,-2)$

$\overline{AC} = C - A = (1,-3,-3)$

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obs 1) $\bar{n} \perp$ planet så är

planets ekv: $(-3)x + (-2)\cdot y + 1\cdot z + D = 0 \; (*)$

Sätt in B i (*):

$(-3)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 4$

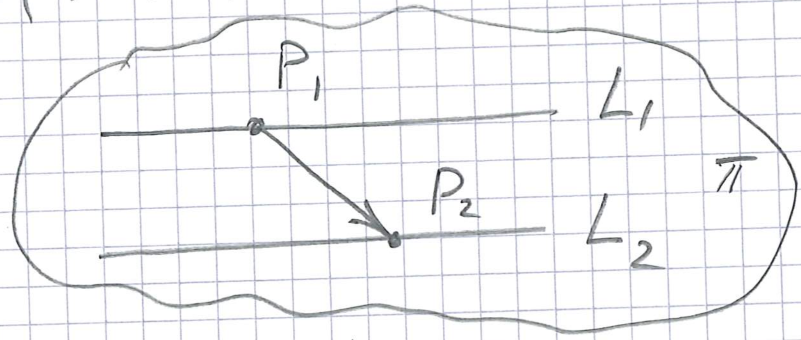
$\Rightarrow$ planets ekv: $-3x - 2y + z + 4 = 0$ eller
$3x + 2y - z - 4 = 0$

1.88 Bestäm ekv för det plan π som innehåller linjerna:

$L_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 2-3t \end{cases}$ o $L_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1-2t \\ z = -1-3t \end{cases}$

Obs $\bar{v}_1(1,-2,-3) \parallel L_1$ Ty $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$ får vi
$\bar{v}_2(1,-2,-3) \parallel L_2$ att $L_1 \parallel L_2$

Rita!



Obs 1) $P_1(1,0,2) \in L_1$

$P_2(0,-1,-1) \in L_2$

2) $\overline{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-1,-1,-3) \subseteq \pi$

3) $\bar{n} = \overline{P_1P_2} \times \bar{v}_1 \perp \pi$

Räkna $\bar{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= \bar{n}_1}$

$\bar{n}_1 \perp \pi$

$\Rightarrow \quad \pi: \quad 1 \cdot x + 2 \cdot y + (-1) \cdot z + D = 0 \qquad (*)$

Sätt in P_1 i $(*)$:

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = 1$

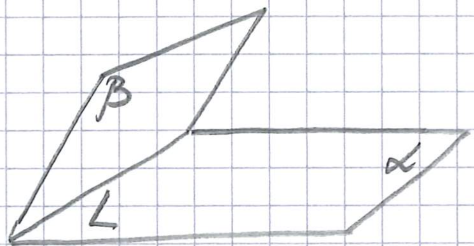
$\Rightarrow \quad \pi: \quad x + 2y - z + 1 = 0$

1.91 Planen $\alpha: \; 3x - y + 2z - 8 = 0$ o

$\beta: \; x + 3z = 2$ skär varandra

längs en rät linje L. Bestäm en riktnings-vektor för L samt L's ekvation.

Rita!



Obs 1) $\bar{n}_\alpha(3, -1, 2) \perp \alpha$ o $\bar{n}_\beta(1, 0, 3) \perp \beta$

$\Rightarrow \quad \bar{n}_\alpha \perp L$ o $\bar{n}_\beta \perp L$

$\Rightarrow \quad \bar{v} = \bar{n}_\alpha \times \bar{n}_\beta$ är en riktningsvektor för L.

Räkna: $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finn en punkt P på $\alpha \cap \beta = L$:

Sätt $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$ o $y = -2 \Rightarrow$

$P(2,-2,0) \in \alpha \cap \beta = L$

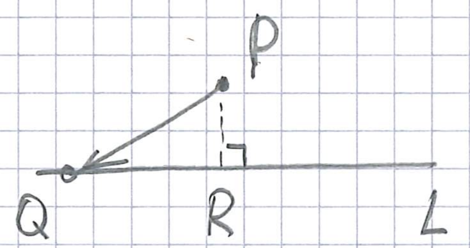
$$\Rightarrow L: \begin{cases} x = 2 + (-3)\cdot t = 2-3t \\ y = -2 + (-7)\cdot t = -2-7t \\ z = 0 + 1\cdot t = t \end{cases}$$

1.103 a) Bestäm den punkt på $L: \begin{cases} x = 7-t & (1) \\ y = -3+t & (2) \end{cases}$ som ligger närmast punkten $P(2,1)$

Obs $(1) \Rightarrow t = 7-x \xrightarrow{} (2): y = -3+(7-x)$

eller $x+y-4=0$ (L's ekv på parameterfri form).

Rita!



Obs $P \notin L$ ty $2+1-4=-1\neq 0$.

Notera att R är den sökta punkten.

Hur hittar man R? Till ex.

Planering: Finn $\overline{PR} = R-P \Rightarrow R = P + \overline{PR}$

Obs 1) $Q(0,4) \in L$ $\underline{o}$ $\overline{PQ} = Q-P = (-2,3)$

2) $\overline{n}(1,1) \perp L$

3) $\overline{PR} = \text{proj}_{\overline{n}} \overline{PQ} = \frac{-2+3}{1+1}\cdot(1,1) = \frac{1}{2}(1,1)$

$\Rightarrow R = (2,1) + \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(b) Bestäm avståndet d mellan L o P

Obs $d = |\overline{PR}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1.109 Bestäm avståndet d mellan planet

$\alpha: -2y + z = 1$ o linjen $L: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases}$

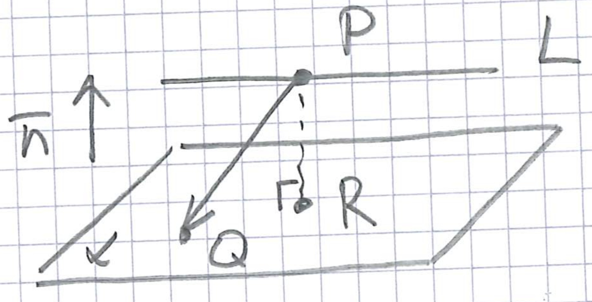
Obs 1) $\bar{n}(0,-2,1) \perp \alpha$,

$\bar{v}(1,1,2) \parallel L$

$\bar{n}\cdot\bar{v} = 0\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0 \Rightarrow \bar{v} \parallel \bar{n}$

2) $P(1,1,-1) \in L$

Rita!



o notera att

$d = |\overline{PR}|$

3) $Q(0,0,1) \in \alpha$ o $\overline{PQ} = Q - P = (-1,-1,2)$

4) $\overline{PR} = \text{proj}_{\bar{n}} \overline{PQ} = \frac{\overline{PQ}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n} =$

$= \frac{(-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 1}{0^2 + (-2)^2 + 1^2}\cdot(0,-2,1) =$

$= \frac{4}{5}(0,-2,1) \Rightarrow d = |\overline{PR}| = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{2^2+1^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

__1.110__ Bestäm avståndet mellan linjerna $L_1: \begin{cases} x = -1-2t \\ y = -3+t \\ z = t \end{cases}$ o $L_2: \begin{cases} x = 4+s \\ y = 2-s \\ z = 3+s \end{cases}$

__Obs__ 1) $\overline{v}_1(-2,1,1) \parallel L_1$ o $\overline{v}_1 \nparallel \overline{v}_2 \Rightarrow L_1 \nparallel L_2$

$\overline{v}_2(1,-1,1) \parallel L_2$

2) Betrakta $\overline{n} = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $P_2(4,2,3) \in L_2$

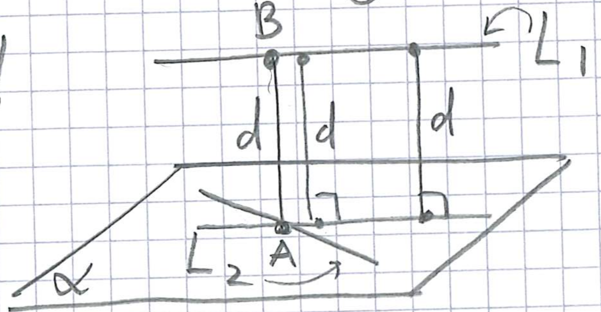
4) Låt α vara det plan som går genom P_2 o $\alpha \perp \overline{n}$

(i) $\alpha: \quad 2x + 3y + z + D = 0$

(ii) $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -17$

$\Rightarrow \alpha: \quad 2x + 3y + z - 17 = 0$

__Rita!__



__Obs__ 1) Avståndet $\underline{d}$ mellan L_1 o L_2 är lika med $|\overline{AB}|$ = avståndet mellan L_1 o α =

= avståndet mellan en punkt på L_1 o α.

2) $P_1(-1,-3,0) \in L_1$ o

$$d = \frac{|2\cdot(-1) + 3(-3) + 1\cdot 0 - 17|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} =$$

$$= \frac{|-2-9-17|}{\sqrt{14}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\cdot\sqrt{14}$$

1.117 Bestäm ekv för en cirkel med medelpunkt $(3,-2)$ o radie 5

Allmänt, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$

Så är $(x-3)^2+(y-(-2))^2 = 5^2$ eller

$(x-3)^2+(y+2)^2 = 25.$

1.126 Avgör den geometriska betydelsen av följande andragradsekvationer.

(a) $x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+y^2=0$

eller $(x-1)^2+y^2=1^2$ (en cirkel med centrum i $(1,0)$ o radie 1)

(b) $x^2-2x+2y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2y^2=1$ eller

$\dfrac{(x-1)^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$ (en ellips med centrum i $(1,0)$ o halvaxlar 1 o $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

(c) $x^2-2x-y^2-2y=1 \Leftrightarrow (x-1)^2-(y+1)^2=1$

(en hyperbel).