2.1 Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) $\bar{u} + 3\bar{v} = (2,1,3,0) + 3(0,-1,1,2) = (2,-2,6,6)$

$\bar{w} - \bar{u} = (2,1,1,0) - (2,1,3,0) = (0,0,-2,0)$

(b) $\bar{u} \cdot \bar{v} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$

$\bar{u} \cdot \bar{w} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 8$

(c) $|\bar{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{14}$

Alla normerade vektorer som är parallella med $\bar{u}$ är $\pm \frac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3,0)$

(d) $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \bar{v} \perp \bar{w}$

(e) Bestäm en vektor $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ s.a.

$\bar{x} \perp \bar{u}$, $\bar{x} \perp \bar{v}$, $\bar{x} \perp \bar{w}$.

$\bar{x}$: $\begin{cases} \bar{x} \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{x} \cdot \bar{v} = 0 \\ \bar{x} \cdot \bar{w} = 0 \end{cases}$ eller $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 & (1) \\ 0x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = 0 & (3) \end{cases}$

Obs (1) o (3) $\Rightarrow x_3 = 0$. Sätt $x_2 = 2$.

(2) $\Rightarrow x_4 = 1$, (1) $\Rightarrow x_1 = -1$

Till ex. $\bar{x} = (-1, 2, 0, 1)$

f) $\text{proj}_{\bar{w}} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{w}}{|\bar{w}|^2} \cdot \bar{w}$

$\bar{u} \cdot \bar{w} = 8$ (se b))

$|\bar{w}|^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 = 6$

$\Rightarrow \text{proj}_{\bar{w}} \bar{u} = \frac{8}{6} \bar{w} = \frac{4}{3}(2, 1, 1, 0)$

g) $|\bar{u} - \bar{w}| =$ / Obs $\bar{u} - \bar{w} = (0, 0, 2, 0)$ /

$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.$

2.2. Visa att om $\bar{u} \perp \bar{v}$ så är

$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$

V.L. $= (\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} + 2 \overset{=0}{\bar{u} \cdot \bar{v}} + \bar{v} \cdot \bar{v} =$

$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 =$ H.L. V.S.V.

2.3 Visa att $|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$ för alla $\bar{u}, \bar{v} \in R^4$

Använd ledningen:

$f(\lambda) = |\bar{u} + \lambda \bar{v}|^2 \geq 0$ för alla λ

Obs $f(\lambda) = (\bar{u} + \lambda \cdot \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \lambda \bar{v}) = |\bar{u}|^2 + 2 \lambda \bar{u} \cdot \bar{v} +$

$+ \lambda^2 |\bar{v}|^2.$

Därför att $f(\lambda) \geq 0$ så har du $f(\lambda) = 0$

en dubbelrot eller inga reella rötter.
(reell)

$\Leftrightarrow \quad (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 - |\bar{u}|^2 \cdot |\bar{v}|^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 \leq |\bar{u}|^2 \cdot |\bar{v}|^2 \Leftrightarrow$

$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$ v. s. v.

2.5. Bestäm en tredje punkt som ligger på samma linje L i R^4 som punkterna $P(2,1,3,4)$ & $Q(4,3,1,2)$.

Till ex. $\quad R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = (3,2,2,3)$

Bestäm linjens ekv.:

$\overline{PQ} = Q - P = (2,2,-2,-2) \Rightarrow$

$$L: \begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 3 - 2t \\ x_4 = 4 - 2t \end{cases}$$

(Obs man kan använda Q eller R istället för P & $\lambda \cdot \overline{PQ}$ där λ är godtycklig icke-trivial reell konstant).

9.1 Vilka av följande mängder är vektorrum med addition o multiplikation med skalär definierade som vanligt.

(a) $M_a = \{ \bar{x} : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \} \subseteq R^3$

Obs M_a är ett underrum till $R^3 \Rightarrow$

M_a är själv ett vektorrum.

För att visa att M är ett underrum till R^3

använd kriteriet:

- Om $\bar{u}, \bar{v} \in M_a$ så är $\bar{u} + \bar{v} \in M_a$ $(*)$
- Om $\bar{u} \in M_a$ o $\lambda \in R$ så är $\lambda \cdot \bar{u} \in M_a$ $(**)$

Verkligen, $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$(*)$ $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4)$

Notera att
$$\begin{aligned} &u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0 \\ + \; &v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \end{aligned}$$
ty $\bar{u}, \bar{v} \in M_a$

$(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + 3(u_3 + v_3) = 0 \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in M_a$

Analogt,

$(**)$ $u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0$ ty $\bar{u} \in M_a$

$\Rightarrow \lambda(u_1 + 2u_2 + 3u_3) = 0$

$\quad\; \parallel$

$(\lambda u_1) + 2(\lambda u_2) + 3(\lambda u_3) = 0 \Rightarrow$

$\lambda \bar{u} \in M_a$ V.S.V.

b) $M_b = \{ \bar{x} \in R^n$ s. a. $x_1 = 1 \}$.

inget underrum till $R^n \Rightarrow$

inget vektorrum.

Verkligen, om $\bar{u}, \bar{v} \in M_b$ så är

$u_1 = 1$ o $v_1 = 1 \Rightarrow u_1 + v_1 = 1 + 1 = 2 \neq 1$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \notin M_b$.

c) $M_c = \{$ alla kontinuerliga funktioner på R som uppfyller $f(1) = 0 \}$

är ett underrum till vektorrummet

av alla kontinuerliga funktioner på R

- om $f, g \in M_c$ så är $f + g \in M_c$
- om $f \in M_c$ o $\lambda \in R$ så är $\lambda \cdot f \in M_c$

Repetera att $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

9.2. $V = R^2$ med följande operationer:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (x_1 + x_2) \\ \lambda (x_1 - x_2) \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ inget vektorrum

ty

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (1+1) \\ 1 \cdot (1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.3. L = mängden av alla positiva tal

med operationerna

$$x + y = xy$$
$$\lambda \cdot x = x^{\lambda}, \quad \lambda \in R$$

utgör ett vektorrum.

Obs $x + y = x \cdot y > 0$ o $\lambda \cdot x = x^{\lambda} > 0 \Rightarrow$

operationerna är väl definierade.

Kontrollera axiomen.

(1) $x + y = xy = yx = y + x$

(2) $(x+y)+z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x + (y+z)$

(3) $x + 1 = x \cdot 1 = x = 1 \cdot x = 1 + x$ (nollelement är 1)

(4) för varje x har vi

$$x + \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \cdot x = \frac{1}{x} + x$$

d.v.s. $\frac{1}{x}$ är motsatt element för x.

(5) $(\lambda + \mu) \cdot x = x^{\lambda + \mu} = x^{\lambda} \cdot x^{\mu} = \lambda \cdot x + \mu x$

(6) $\lambda(x+y) = (xy)^{\lambda} = (x^{\lambda}) \cdot (y^{\lambda}) = x^{\lambda} + y^{\lambda} =$

$= \lambda \cdot x + \lambda y, \quad \lambda, \mu \in R$

(7) $(\lambda \cdot \mu) x = x^{\lambda \cdot \mu} = (x^{\mu})^{\lambda} = \lambda (x^{\mu}) = \lambda(\mu \cdot x)$

(8) $1 \cdot x = x^1 = x$ v.s.v.