2.7 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$

Bestäm $A-B=\begin{pmatrix}(1-6) & (4+2) & (5-3)\\ (-1-1) & (3-1) & (2-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6 & 2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$

$B+C=\begin{pmatrix}(6+5) & (-2+4) & (3+2)\\ (1+3) & (1-2) & (2+4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 6\end{pmatrix}$

$2B=\begin{pmatrix}(2\cdot 6) & 2\cdot(-2) & (2\cdot 3)\\ (2\cdot 1) & (2\cdot 1) & (2\cdot 2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -4 & 6\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$B+2C=\begin{pmatrix}(6+10) & (-2+8) & (3+4)\\ (1+6) & (1-4) & (2+8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 6 & 7\\ 7 & -3 & 10\end{pmatrix}$

$2B+C=\begin{pmatrix}(12+5) & (-4+4) & (6+2)\\ (2+3) & (2-2) & (4+4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 0 & 8\\ 5 & 0 & 8\end{pmatrix}$

2.9 Transponera

(a) $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}^t=(1\ 2\ 3)$

(b) $(1\ 2\ 3)^t=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

Symmetriska matriser är (a), (f)

2.11 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

(a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2+2) & (3+4) & (4+6)\\ (-4+1) & (-6+2) & (-8+3)\end{pmatrix}=$

Obs $(2\times 2)\cdot(2\times 3)$ ok!

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2-3+4 \\ 1-2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obs $(2\times \underline{3}) \cdot (\underline{3}\times 1)$ ok.

(b)

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7+10 \\ -3+4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Obs $(2\times \underline{3}) \cdot (\underline{3}\times 1)$ ok.

// Obs!

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ -6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Obs $(2\times \underline{2}) \cdot (\underline{2}\times 1)$ ok

2.14 A är (3×5), B – (5×2), C – (3×4)

D – (4×2) o E – (4×5)

Bestäm vilka av följande matriser som existerar o bestäm av vilka typer de är.

(a) $A \cdot B + C$

$$(\underline{\underline{3}}\times \underline{5})(\underline{5}\times \underline{\underline{2}}) + (3\times 4) = (3\times \underset{\sim}{2}) + (3\times \underset{\sim}{4})$$ finns ej

$2 \neq 4$

(b) $A \cdot B + C \cdot D = (3\times 2) + (3\times 2) = (3\times 2)$ ok

(3×2) $(3\times \underline{4}) \cdot (\underline{4}\times 2)$

(c) $3EB + 4D = (4\times 2) + (4\times 2) = (4\times 2)$ ok.

$(4\times \underline{5})(\underline{5}\times 2)$

(d) $CD - 2(C \cdot E)B = (3\times 2) - (3\times 2) = (3\times 2)$ ok.

$(3\times \underline{4})(\underline{4}\times 2)$ $((3\times \underline{4}) \cdot (\underline{4}\times \underset{\sim}{5}))(\underset{\sim}{5}\times 2)$

(e) $\underset{(4\times5)(5\times2)}{2EB} + \underset{(4\times2)(3\times5)}{DA} = (4\times 2) + (\text{finns ej}) = \text{finns ej.}$

$2 \neq 3$

2.15 Beräkna potenserna A^n, $n = 2, 3, \ldots$ då

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Obs $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ gånger}}$

Räkna (i) $n=2$ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$

(ii) $n=3$ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$

dra slutsats

$\Rightarrow$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Räkna (i) $n=2$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $n=3$ $A^3 = A^2 \cdot A =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Dra slutsats $A^n = 0$ för alla $n \geq 3$.

2.16. Beräkna

(a) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4+4 \\ 0+8+6 \\ 1+12+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} = (3\times 1)$$

Obs $(3\times 3)\cdot(3\times 1)$ är.

(b) $$(1\ 4\ 2)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (3+4+4,\ 0+8+6,\ 1+12+2) = (11,\ 14,\ 15) = (1\times 3)$$

$(1\times 3)(3\times 3)$

(c) XX^t där $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Obs $X^t = (x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow X\cdot X^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\cdot(x_1\ x_2\ x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix} = (3\times 3)$$

$(3\times 1)(1\times 3)$

(d) Gör själv! som ovan.

2.21. A, B är kvadratiska av samma typ.

Visa att om $AB = BA$ $(*)$ så gäller

(a) $(AB)^2 = A^2 B^2$

$$V.L. = (AB)\cdot(A\cdot B) = A(BA)B \overset{(*)}{=} A(AB)B = (AA)(BB) = H.L.$$

(e) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$V.L. = (A+B)\cdot(A+B) = AA + \underline{AB} + \underline{BA} + BB \overset{(*)}{=} A^2 + 2AB + B^2 = H.L.$

(c) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$V.L. = AA - \underline{AB} + \underline{BA} - BB \overset{(*)}{=} A^2 - B^2 = H.L.$

<u>2.23</u> Låt $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Visa att $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ (m h a <u>trigonometrin</u>)

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) & (-\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \\ (\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta) & (-\sin^2\theta + \cos^2\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$ (<u>Obs</u> <u>dubbelvinkel</u>).

<u>2.25</u> Bestäm $(A+I)^{10}$ om $A^2 = A$, I <u>enhetsmatris</u>

Notera att $A^n = A$ för alla $n \geq 1$.

Repetera att $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ $(*)$

$$\Rightarrow (A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot A^k \cdot I^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot A \cdot I + \binom{n}{0} \cdot I = \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right) \cdot A + I =$$

$$= (2^n - 1) A + I$$

$$\left(\begin{array}{l} (i)\ (1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad (\text{se } (*)), \text{ o} \\ (ii)\ \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{bl.a. } \binom{n}{0} = 1 \end{array} \right)$$