Lek 12

Fredagsmys

- Repetition av den geometriska betydelsen av kvadratiska ekvationssystem
- Determinantkriterier för ekvationssystem

Ekvationssystem med 2 variabler

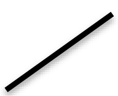
Linjära ekvationer som t.ex. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ bildar ett system.

Varje ekvation beskriver en linje i planet (t.ex. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$)

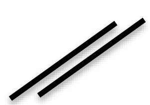
Lösningsmängden = samtliga lösningar till ekvationssystemet
= de *gemensamma* punkterna för linjerna.

Tre huvudfall:

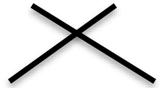
- Två identiska linjer (oändligt många lösningar)



- Två parallella linjer (saknas lösningar)



- Två linjer som inte är parallella skär varandra i precis en punkt, (finns en entydig lösning till systemet)



Ekvationssystem med 3 variabler

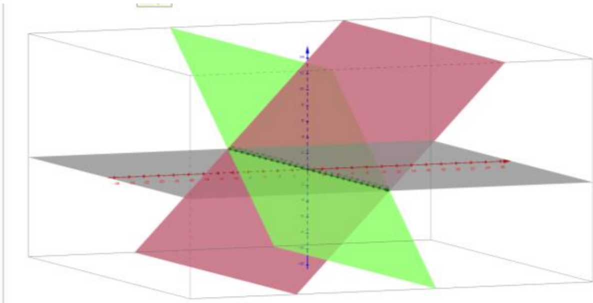
Linjära ekvationer som t.ex. $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$ bildar ett system.

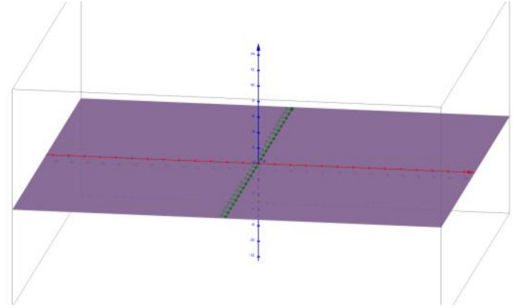
Varje ekvation beskriver ett plan i rummet (t.ex. $2x - y + 3z - 3 = 0$)

Tre huvudfall:

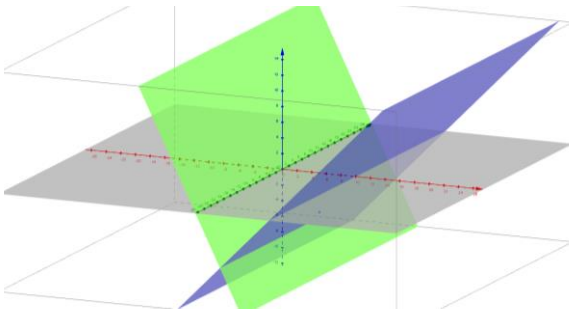
- En gemensam skärningslinje alt. tre sammanfallande plan (oändligt många lösningar)
- Tre skilda parallella skärningslinjer, Två skilda parallella skärningslinjer, Tre skilda parallella plan (saknas lösningar)
- Tre plan som skär varandra i precis en punkt, (finns en entydig lösning till systemet)

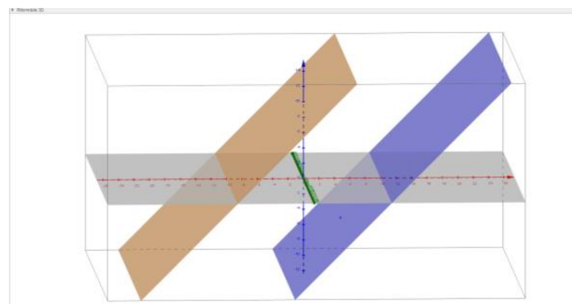
Fall 1

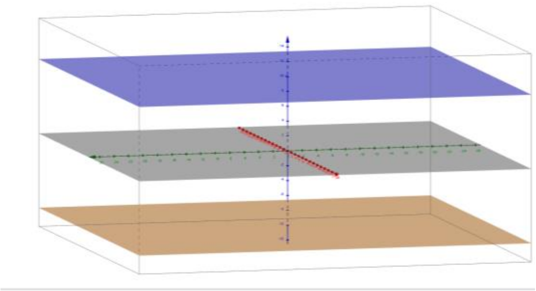




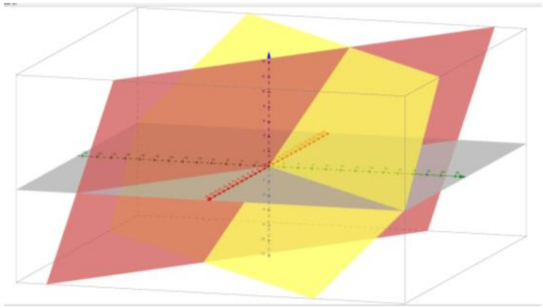
Fall 2







Fall 3



Determinantkriteriet

Sats 5.1

- $\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning.
- $\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning eller har oändligt antal lösningar.

Exempel Undersök antalet lösningar till ekvationssystemet (nedan) för olika värden på a.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 0 \\ x + 3y + 2az = 1 \end{cases}$$

Lösning. Bestäm determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 0 \\ 1 & 2 & 2a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2a-1)(a-2)$$

- För all $a \neq 2$ och $a \neq \frac{1}{2}$ det (A) $\neq 0$ och systemet har **entydig lösning**
- Om $a = 2$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$ har **ingen** lösning

Determinantkriteriet

Sats 5.1

- $\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning.
- $\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow$ Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saknar lösning eller har oändligt antal lösningar.

Exempel Undersök antalet lösningar till ekvationssystemet (nedan) för olika värden på a.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 0 \\ x + 3y + 2az = 1 \end{cases}$$

Lösning. Bestäm determinanten:

- Om $a = \frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1/2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

har **oändligt många** lösningar

dvs y=0, z=t och x=1-t

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinantkriteriet

Sats 5.2

- $\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har entydig lösning (triviala lösn.)
- $\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har oändligt många lösningar.

Exempel Undersök om det finns någon vektor **x**=$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} \neq 0$ så att vektorerna Ax är parallella, där A= $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning. Ax och x är parallella om A**x** =$\boldsymbol{\lambda}$**x** $\Leftrightarrow$ A**x** – $\boldsymbol{\lambda}$**x = 0** $\Leftrightarrow$ (A – $\boldsymbol{\lambda I}$)**x = 0**

$$\begin{vmatrix} 4-\boldsymbol{\lambda} & -1 \\ 2 & 1-\boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = (4-\boldsymbol{\lambda})(1-\boldsymbol{\lambda}) + 2 = \boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 6 = 0$$

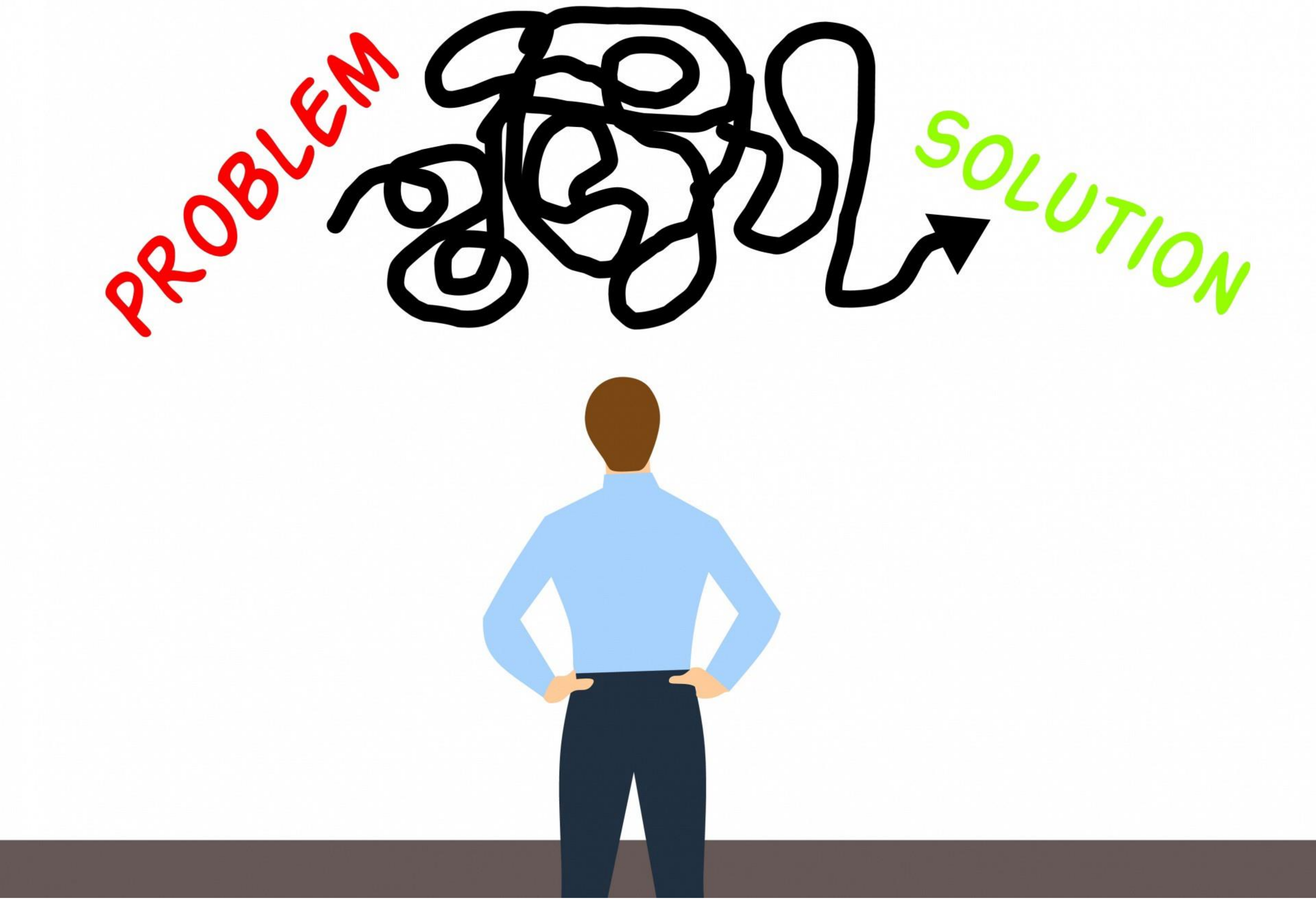
$$\boldsymbol{\lambda_1 = 3 \; och \; \lambda_2 = 2}$$

$\boldsymbol{F\text{ö}r \;\; \lambda_1 = 3}$ *gäller*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4-3} & \mathbf{-1} & \big| & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1-3} & \big| & \mathbf{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \big| & \mathbf{0} \\ \cancel{\mathbf{2}} & \cancel{\mathbf{-2}} & \big| & \cancel{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x_2 = t} \quad \boldsymbol{x_1 = t} \;\; \textit{alltså } \mathbf{x}\text{=t}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{F\text{ö}r \;\; \lambda_1 = 2}$ *gäller*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4-2} & \mathbf{-1} & \big| & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1-2} & \big| & \mathbf{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \big| & \mathbf{0} \\ \cancel{\mathbf{2}} & \cancel{\mathbf{-1}} & \big| & \cancel{\mathbf{0}} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x_2 = t} \quad \boldsymbol{x_1 = t/2} \;\; \textit{alltså } \mathbf{x}\text{=t}\begin{pmatrix} \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$


PROBLEM
SOLUTION