Lektion 14

Dagens program

- Matrisinvers och Inversa avbildningar

Matrisinvers

Låt $a, y \in \mathbb{R}$ och $a \notin 0$. Då

$$ax = y \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1}ax = a^{-1}y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{-1}y$$

Motivation: Studerar motsvarande matrisekvationen $AX = Y$ där A är en kvadratisk matris.

Definition En kvadratisk matris A kallas **inverterbar** om det finns en matris B så att

$$AB = BA = I$$

B kallas A:s **invers** och betecknas A^{-1}

OBS! A, A^{-1} och B har samma format.

Räknelagar.

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (OBS! ordning)
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ för alla heltal $n \geq 1$

Matrisinvers

- Exempel om $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ så avbildas vektorn **x**=$\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ på

$$\mathbf{y}= A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$$

Antag nu att vi istället känner till y=$\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$ och söker **x**,

$$\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}= A\mathbf{x}$$

dvs $\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

Matrisinvers

Lös ekvationen $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

alltså **x**=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är den enda vektorn som avbildas på $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Frågan är om vi kan hitta en matris $\boldsymbol{A}^{-1}$ så att

Matrisinvers

Allmänt, givet A=$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$ och **y**=$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ vilka **x** ger **y**= A**x?**

$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & y_1\\1 & 1 & y_2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & y_1\\0 & -1 & y_2-y_1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & y_1-2(y_1-y_2)\\0 & 1 & y_1-y_2\end{array}\right)$$

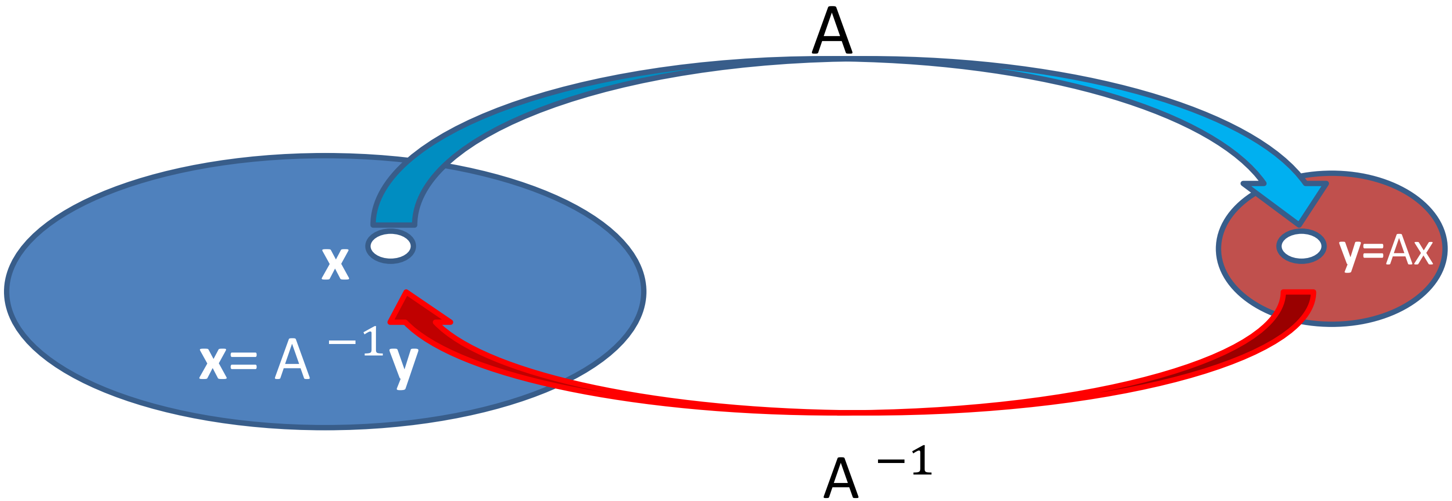
$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2y_2-y_1\\0 & 1 & y_1-y_2\end{array}\right)$$

alltså **x**=$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}2y_2-y_1\\y_1-y_2\end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

Dvs, till varje $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ finns **exakt** ett $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ s.a. **y**= A**x**

Matrisen $\begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$kallas **inversen** till A och betceknas A^{-1}

Matrisinvers



Matrisinvers

Obs! om A har invers A $^{-1}$ så är y= Ax = AA $^{-1}$y dvs AA $^{-1}$=I

Obs! A har invers **omm** det A $\neq$0

Metod:

AA $^{-1} = \mathrm{I}$, $\quad (A|I) \sim \ \ldots \ \sim (I|A^{-1})$

Beräkna inversen till

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösning

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisinvers

Sats 6.2 Antag att A och C är nxn matriser och låt I vara av typen I

a) Om A är inverterbar med inversen A^{-1} så är $AA^{-1}=A^{-1}A = I$
b) Om AC= I eller CA=I så är A inverterbar och $C = A^{-1}$

Exempel. A och B är inverterbara. Bestäm X då

$AXB=AB+A^{2}$

Lösning: $AXB=AB+A^{2} \Leftrightarrow$

/multiplicera med A^{-1} fr vänster/

$A^{-1}AXB=A^{-1}AB+A^{-1}A^{2} \Leftrightarrow$

$XB=B+A \Leftrightarrow$

/multiplicera med B^{-1} fr höger/

$XBB^{-1}=BB^{-1}+AB^{-1} \Leftrightarrow$

$X=I+AB^{-1}$

Isometriska avbildningar

Isometrisk = Samma Längd

$|Ax| = |\mathbf{x}|$, A kallas för On-matris

Kolonvektorerna ortonomerade , vinkelräta, längd 1

A $^{-1}$=A ^{t}