Lektion 16

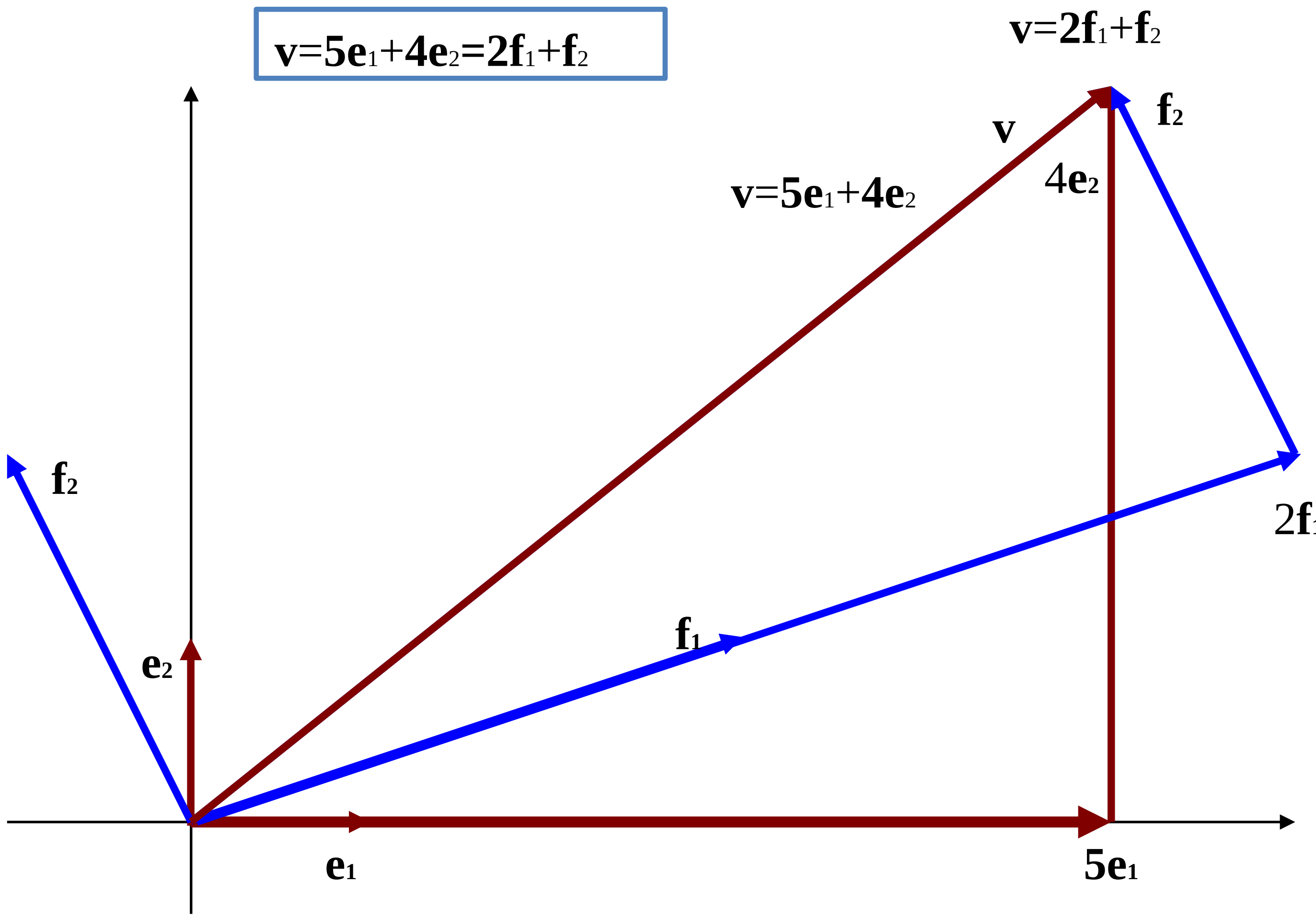
Dagens ämnen

- Basbyte
  - Bassamband
  - Koordinatsamband
  - Linjära avbildningar
- Diagonalisering

med lin alg

Basbyte

Mål: Hitta matrissamband mellan basvektorerna i två olika baser.
Använda detta till att hitta samband mellan koordinatmatriserna för en vektor med avseende på dessa baser.



Basbyte

- Låt $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n)$ och $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_n)$ vara två baser i $\mathbb{V}$
- Uttrycker elementen av den nya basen i gamla basen:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{i}} = T_{i1}\mathbf{e}_1 + T_{i2}\mathbf{e}_2 + \cdots + T_{in}\mathbf{e}_n = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} T_{i1} \\ T_{i2} \\ \vdots \\ T_{in} \end{pmatrix}$$

- Bilder matrisen T som består av T:s kolonner ovan, d v s i T:s kolonner står nya basen uttryckt i gamla

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} \cdots T_{i1} \cdots T_{n1} \\ T_{12} \cdots T_{i2} \cdots T_{n2} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ T_{1n} \cdots T_{in} \cdots T_{nn} \end{pmatrix}$$

- Kom ihåg bassambandet:

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} \cdot T$$

- Observera att **koordinatsambandet** går ”andra hållet”

$$X_{\underline{e}} = TX_{\underline{\mathbf{f}}} \Leftrightarrow X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}X_{\underline{e}}$$

REP.. Basbyten i $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$**:**

$$\mathbf{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{eX_e}$$
$$\mathbf{u} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\mathbf{f}_3 = \boldsymbol{fX_f}$$

f=**e**P

Så gäller $\mathbf{u}$=$\boldsymbol{eX_e}$=$\boldsymbol{fX_f}$= / **f**=**e**P / =**e**P$\boldsymbol{X_f}$

Alltså är

$\boldsymbol{X_e}$= P$\boldsymbol{X_f}$

Sats 8.1

Om f=**e**P (bassambandet) där P^{-1} ∃ **så är:**

- $\boldsymbol{X_e}$= P$\boldsymbol{X_f}$
- $\boldsymbol{X_f}$= $P^{-1}\boldsymbol{X_e}$

P kallas **basbytesmatrisen** från basen **e** till basen **f**

Gamla basen

Nya basen

Exempel. Låt $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ och $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2 \mathbf{f}_3)$ vara baser i $\mathbb{R}^3$ för vilka gäller

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$.

Lösning.

$$\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ etc}$$

Framställer transformationsmatrisen:

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} T, \qquad \text{där } T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Följaktligen är $\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}} T^{-1}$ och

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} T^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, dvs\ sök\ X_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} X_{\underline{e}}$$

Räkna

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

Alltså

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

REP.. Basbyten och linjära avbildningar

Vi studerar avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$

Obs!

Då gäller

- **L(u)=** $\boldsymbol{e}A_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}}$ räknat i basen **e**
- **L(u)=** $\boldsymbol{f}A_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$ räknat i basen **f**

Dvs $\boldsymbol{e}A_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}}$**=** $\boldsymbol{f}A_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$

Men $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{e}}$= P$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$ och **f**=**e**P

$\boldsymbol{e}A_{\boldsymbol{e}}\mathrm{P}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$=$\boldsymbol{e}\mathrm{P}A_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{f}}$

$A_{\boldsymbol{e}}\mathrm{P}$=$\mathrm{P}A_{\boldsymbol{f}}$

Dvs för att få $A_{\boldsymbol{e}}$ multiplicera med P^{-1} höger så att:

$A_{\boldsymbol{e}}$=$\mathrm{P}A_{\boldsymbol{f}}P^{-1}$

För att få $A_{\boldsymbol{f}}$ multiplicera med P^{-1} från vänster så att:

$A_{\boldsymbol{f}}$=$P^{-1}A_{\boldsymbol{e}}\mathrm{P}$

Avbildningsmatrisen i gamla basen

Avbildningsmatrisen i nya basen

REP.. Basbyten och linjära avbildningar

Fortsättning:

$A_{\boldsymbol{e}}$=P$A_{\boldsymbol{f}}P^{-1}$

$A_{\boldsymbol{f}}$=$P^{-1}A_{\boldsymbol{e}}$P

Bokens notation	Notation här
$A_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}}$	$A_{\boldsymbol{f}}$
A	$A_{\boldsymbol{e}}$

Boken använder då sambandet A=P$A_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}}P^{-1}$ (istället för $A_{\boldsymbol{e}}$=P$A_{\boldsymbol{f}}P^{-1}$)

Exempel Betrakta **speglingen** F i planet Π: $x_1 - 2x_3 = 0$. Sök $A_{\boldsymbol{e}}$ (genom att införa en ny bas **f**)

- Då gäller att $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{x}$ för alla vektorer $\mathbf{x}$ i planet Π, d v s $\lambda_1 = 1$.

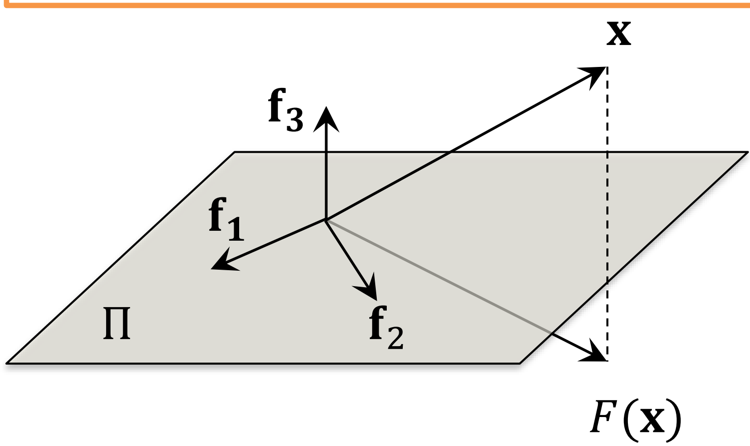
- Normalvektorn $\mathbf{f_3} = (1,0,-2)$ speglas i planet till $-\mathbf{f_3}$, med andra ord $F(\mathbf{f_3}) = -\mathbf{f}_3$. D v s $\mathbf{f}_3$är en egenvektor med egenvärde $\lambda_2 = -1$.

Om $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en bas i Π (Tex $\mathbf{f_1} = (2,0,1)$ $\mathbf{f_3} = (0,1,0)$) då bildar $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f_3}$ en bas i $\mathbb{R}^3$ med avbildningsmatris till L (f) vara.

$$A_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$A_{\boldsymbol{e}}$=T$A_{\boldsymbol{f}} T^{-1}$

$$A_{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$



Observera att

- $\lambda_1 = \ 1$ är för både $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ som ligger i Π
- $\lambda_2 = -1$ är för $\mathbf{f_3}$ som speglas i Π

Diagonalisering

Definition 8.1 Den kvadratiska nxn- matrisen A är *diagonaliserbar* om det finns en icke-singulär (d.v.s inverterbar) matris P och en diagonal matris D så att:

$$D = P^{-1} A P$$

(Jmf med $A_{\boldsymbol{f}} = P^{-1} A_{\boldsymbol{e}} P$)

Sats 8.5 Den kvadratiska nxn- matrisen A är *diagonaliserbar* **omm** matrisen har en uppsättning av n stycken egenvektorer $\mathbf{e} = (\boldsymbol{e_1}\ \boldsymbol{e_2}\ \boldsymbol{e_3} \ldots \boldsymbol{e_n})$ som är linjärt oberoende. Den matris P som vars kolonner består av dess egenvektorers koordinater (i standardbasen) är den efterfrågade *diagonaliserande* matrisen och diagonalmatrisen D byggs upp av motsvarande egenvärden.

Sats 8.6 Om matrisen A är av typen nxn har n st olika egenvärden så är den diagonaliserbar.

Sats 8.7 (Diagonaliseringssatsen) till varje symmetrisk nxn-matris, A, kan man finna en ON-matris och en diagonal matris så att:

$$D = P^t A P$$

$$A = P D P^t$$

Diagonalisering

Exempel: Diagonalisera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Sök egenvärden: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$, d v s $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$

- Sök egenvektorer:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Basbytarmatrisen:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A är diagonaliserbar med diagonalmatrisen: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *så att* $D = P^{-1}AP$

Kontroll $\quad A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$=A

(Kan utnyttjas om man t.ex. vill bestämma A^{100}, $varför?$)