Lektion 18

Dagens ämnen

- Kvadratiska former
  - Matrisform
  - Diagonalisering av kvadratiska former
- Andragradskurvor
  - De olika kurvtyperna
  - Bestämma geometrisk betydelse av en ekvation
- Värdemängden till kvadratiska former
- Klassificering av kvadratiska former

  - Genomgång av gammal tenta nästa gång?

-

Vad är kvadratisk form?

Definition: Kvadratisk form av två och tre variabler.
En *kvadratisk form* i två respektive tre variabler är ett uttryck av typen

$$\mathbf{Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2}$$

respektive

$$\mathbf{Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2}$$

där $\mathbf{a, b, c, d, e}$ och $\mathbf{f}$ är reella konstanter.

***Form* är ett äldre ord för *homogent polynom*, det vill säga ett polynom där alla termer har samma totala gradtal. Med andra ord är en kvadratisk form ett *homogent polynom av andra graden*.**

Definition: Kvadratisk form av två och tre variabler.
En *kvadratisk form* i två respektive tre variabler är ett uttryck av typen

$$\mathbf{Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2}$$

respektive

$$\mathbf{Q(x,y,z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2}$$

där $\mathbf{a, b, c, d, e}$ och $\mathbf{f}$ är reella konstanter.

Exempel. Kvadratiska former.
Vilka av nedanstående uttryck är kvadratiska former?

a) $\mathbf{x^2 + 3y^2}$

b) $\mathbf{x^2y^2}$

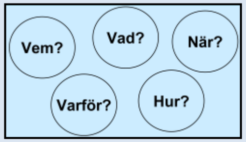
c) $\mathbf{\frac{3}{5}x^2 - 2y^2}$

d) $\mathbf{xy}$

e) $\mathbf{2x^2 - xy + y}$

VAD?

Bild: SVT



VAD?

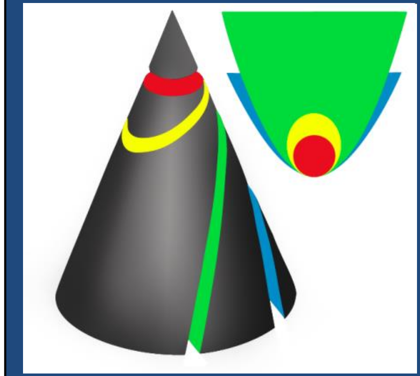
Definition: Kvadratisk form av två och tre variabler.
En *kvadratisk form* i två respektive tre variabler är ett uttryck av typen

$$\mathbf{Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2}$$

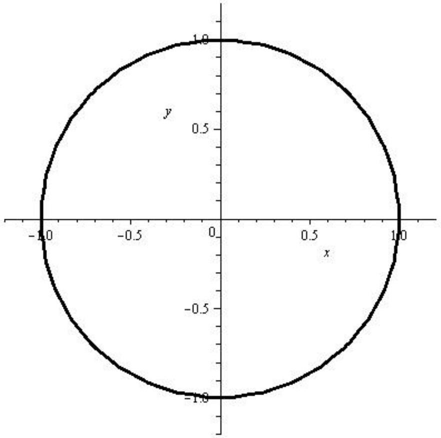
respektive

$$\mathbf{Q(x,y,z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2}$$

där a, b, c, d, e och f är reella konstanter.

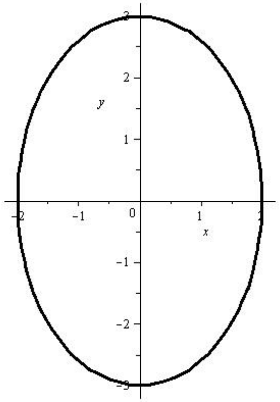


$$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$$



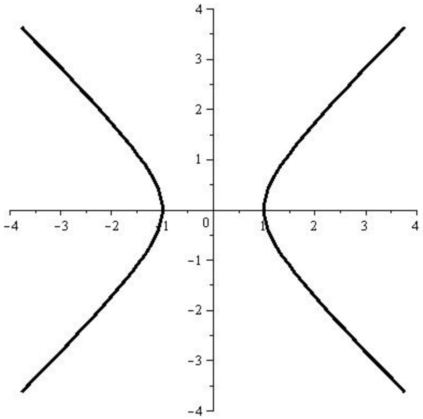
Cirkel

$$\mathbf{\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1}$$

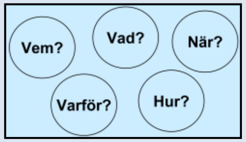


Ellips

$$\mathbf{x^2 - y^2 = 1}$$



Hyperbel



Matrisbeskrivning av kvadratiska former

Samma kvadratiska form kan definieras av olika matriser A

Exempel. Ange tre matriser A, B och C för att beskriva den kvadratiska formen Q:

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Lösning: t.ex.

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1(x_1 + 4x_2) + x_2(0x_1 + x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1(x_1 + 1x_2) + x_2(3x_1 + x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Svar: A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ OBS! Endast B är symmetrisk

kvadratiska former

Sats 8.8 Till varje kvadratisk form Q hör en entydigt bestämd symmetrisk matris S sådan att

$$Q(\mathbf{x}) = X^t S X$$

Exempel. Betrakta $Q\ och\ ange\ S$:

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 14x_2x_3 =$$

$$= x_1(-x_1 + x_2 + 4x_3) + x_2(x_1 + 3x_2 - 7x_3) + x_3(4x_1 - 7x_2 + 5x_3)$$

$$= (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Samma uppställning i färg:

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 14x_2x_3$$

Då $Q(\mathbf{x}) = X^t S X$ där den symmetriska avbildningsmatrisen i detta fall är:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2/2 & 8/2 \\ 2/2 & 3 & -14/2 \\ 8/2 & -14/2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalisering av kvadratiska former

Betrakta

$$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 =$$

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {X_e}^t S X_e$$

där **x** är $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X_e}$ Koordinater för **x** i standardbasen **e** för $\mathbb{R}^3$

Låt nu $(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \boldsymbol{f_3})$ var en annan ON − bas för $\mathbb{R}^3$ så att **x** är $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X_f}$ Koordinater för **x** i basen **f**

$$\boldsymbol{Koordinatsamband\ X_e} = \mathrm{P}\boldsymbol{X_f}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{P}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

P är en ON-matris med koordinater för $\boldsymbol{f_1}(kolonn\ 1), \boldsymbol{f_2}(kolonn\ 2), \boldsymbol{f_3}(kolonn\ 3)$i basen **e**

Diagonalisering av kvadratiska former

Alltså är

$\boldsymbol{X_e} = \mathrm{P}\boldsymbol{X_f}$

$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = X_e{}^t S X_e = (\mathrm{P}\boldsymbol{X_f})^t\, S\, \mathrm{P}\boldsymbol{X_f}$ =Räkneregel transp= $\boldsymbol{X_f}{}^t \mathrm{P}^t S\, \mathrm{P}\boldsymbol{X_f}$ =

$\boldsymbol{X_f}{}^t(\mathrm{P}^t S\, \mathrm{P})\boldsymbol{X_f} = (y_1\ y_2\ y_3)\ (\mathrm{P}^t S\ \mathrm{P}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Sats 8.7 (Diagonaliseringssatsen) till varje symmetrisk nxn-matris , A, kan man finna en ON-matris och en diagonal matris så att:

$$D = P^t A P$$
$$A = P D P^t$$

De nya basvektorerna ska väljas som parvis ortogonala och normerade egenvektor till S, där diagonal matrisen består av S egenvärden.

$$Q(\mathbf{x}) = (y_1\ y_2\ y_3)\ (\mathrm{P}^t S\ \mathrm{P}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ y_3)\ D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ y_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ *"Kanoniska form"*

Kvadratiska former

Sats 8.9 (Huvudsatsen för kvadratiska former)

Låt $Q(\boldsymbol{x})$ vara en kvadratisk form och $Q(\mathbf{x}) = {X_e}^t S X_e$, där S är en symmetrisk matris. Låt $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ vara en ON-bas av egenvektorer till P. Då är

$Q(\mathbf{x}) = {\boldsymbol{X_f}}^t D \boldsymbol{X_f} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ ”Kanoniska formen”

där λ_i är egenvärde till S med tillhörande $\mathbf{f}_i$ och $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}P$, $\mathbf{x} = \underline{\mathbf{e}}X_{\underline{\mathbf{e}}} = \underline{\mathbf{f}}X_{\underline{\mathbf{f}}}$ dvs $X_{\underline{\mathbf{e}}} = \boldsymbol{P}X_{\underline{\mathbf{f}}}$

Andragradskurvor

Exempel. Diagonalisera Q(**x**)=$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$. Ange också variabelbytet som överför den kvadratiska formen till diagonal form

Lösning.

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = {X_e}^t S X_e, \qquad \text{där } S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$ ger $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$, alltså

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = {X_e}^t S X_e = {\boldsymbol{X_f}}^t D \boldsymbol{X_f} = y_1^2 + 3y_2^2, \qquad \text{där } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \implies \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \implies \begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X_{\underline{\mathbf{e}}} = \boldsymbol{P} X_{\underline{\mathbf{f}}}$ ger variabel bytet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Andragradskurvor

Huvudtyperna (med medelpunkterna i origo)**:**

- **Ellips**: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$
- **Hyperbel**: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ (eller $= -1$)
- **Parabel:** $x_2 = ax_1^2$ eller $x_1 = ax_2^2$
- **Ett par av korsade linjer**: $x_1^2 - k^2x_2^2 = 0$

Andragradskurvor

Exempel. Ange kurvtyp, axelriktningar samt halvaxlarna till kurvan
$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$

Lösning.

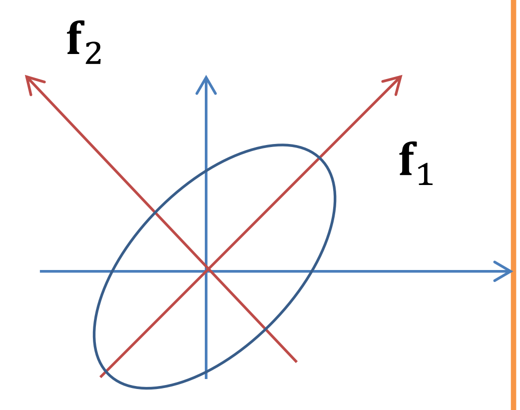
$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = {X_e}^t S X_e, \qquad \text{där } S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$ ger $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, alltså

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = {X_e}^t S X_e = {\boldsymbol{X_f}}^t D \boldsymbol{X_f} = y_1^2 + 3y_2^2 = 1, \qquad \text{där } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Följaktligen är kurvtyp en ellips $\frac{y_1^2}{1^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ där halvaxlarna är 1 resp. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Symmetriaxlarna fås som egenriktningar



$$\lambda_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Värdemängden till kvadratiska former

Sats 8.10 Låt $Q(\boldsymbol{x})$ vara en kvadratisk form och $Q(\mathbf{x}) = {X_e}^t S X_e$, där S är en symmetrisk matris. Då gäller

$$\lambda_{\min}|\mathbf{x}|^2 \ \leq \ Q(\mathbf{x}) \leq \ \lambda_{\max}|\mathbf{x}|^2$$

där $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ om koordinaterna är givna i en ON-bas. Likhet fås endast då $\mathbf{x} =$ egenvektor till egenvärdet $\lambda_{\min}$ resp egenvektor till egenvärde $\lambda_{\max}$.

Speciellt, om $|\mathbf{x}| = 1$ så är

$$\lambda_{\min} \leq \ Q(\mathbf{x}) \ \leq \ \lambda_{\max}$$

Exempel. Den kvadratiska formen h($\mathbf{x}$) $= 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$. Bestäm h$(\mathbf{x})_{max}$ då $|\mathbf{x}| = 1$ och bestäm i vilken punkt $(x_1,\ x_2\ , x_3)$ detta värde antas.

Lösning: Den symmetriska matrisen $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **är** sådan att h(x)=X^tSX

Sekularekvationen ger $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$=0 vilket ger λ_1=0, $\lambda_2 = 3\ och\ \lambda_3 = 6$

Eftersom det finns 3 st egenvärden och dessa är skilda så kan vi enligt sats 8.7 finna en On-bas $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ så att $X_{\underline{\mathbf{e}}} = \boldsymbol{P}X_{\underline{\mathbf{f}}}$

Egenvektorerna bestäms på vanligt sätt, här efter normering

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi vet att h(x)=$X^tSX = [sats\ 8.9\ huvudsatsen\ för\ kvadratiska\ former] = 0y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$

Vi vet också att $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ då både **e** och **f** är **ON** baser

h(x)=$X^tSX = 0y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 \leq 6\ (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ =6$|\mathbf{x}|^2$=6 och likhet inträffar för $|\mathbf{x}|$ =1 då $y_1 = y_2 = 0\ och\ y_3 = 1 \quad dvs\ (0,0,1)_f = \frac{1}{3}(-2,2,-1)_e$

Klassificering av kvadratiska former

Definition 8.3 En kvadratisk form Q sägs vara

a) *Positivt definit* om $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0 \; f\text{ör} \; \forall \; \boldsymbol{x}$ **omm** likheten gäller för **x=0**
b) *Positivt semidefinit* om $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0 \; f\text{ör} \; \forall \; \boldsymbol{x}$ och om det finns någon vektor **x** $\neq$ **0** för vilket $Q(\boldsymbol{x}) = 0$
c) *Indefinit* om $Q(\boldsymbol{x})$ antar såväl positiva som negativa värden
d) *Negativt definit* om $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0 \; f\text{ör} \; \forall \; \boldsymbol{x}$ **omm** likheten gäller för **x=0**
b) *Negativt semidefinit* om $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0 \; f\text{ör} \; \forall \; \boldsymbol{x}$ och om det finns någon vektor **x** $\neq$ **0** för vilket $Q(\boldsymbol{x}) = 0$

Exempel. Bestäm typen av den kvadratiska

a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$
c) $Q(x_1, x_2, x_3) = -(4x_1x_2 + 4x_2x_3)$

Klassificering av kvadratiska former

Sats 8.11 En kvadratisk form $Q = {X_e}^t\, SX_e$, där matrisen S är symmetrisk är

Positivt definit	precis då $\lambda_{min} > 0$
Negativt definit	precis då $\lambda_{max} < 0$
Positivt semidefinit	precis då $\lambda_{min} = 0$
Negativt semidefinit	precis då $\lambda_{max} = 0$
Indefinit	precis då S har både positiva och negativa egenvärden.

Exempel. Ange en ny bas för $\mathbb{R}^3$ så att den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ inte innehåller några blandade produkter i den nya basen . Bestäm också typen av den kvadratiska formen!

Lösning 1 (Egenvärdteori) Här blir

$$Q(\mathbf{u}) = X^tAX \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Då fås $\det(A - \lambda I) = \cdots = \lambda(\lambda - 6)(\lambda + 2)$ vilket ger en ON-bas bestående av egenvektorer

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 6 \qquad\qquad \lambda_2 = -2 \qquad\qquad \lambda_3 = 0$$

vilket ger $Q(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 6y_1^2 + (-2)y_2^2 + 0y_3^2 = 6y_1^2 - 2y_2^2$ INDEFINIT

Lösning 2 (Kvadratkomplettering) Samla ihop alla termer som innehåller x_1 och bilda en kvadrat där alla dessa ingår, fortsätt på samma sätt med x_2 osv. Vi får

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 = \\
&= x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (2x_2 + 3x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 4x_2^2 - 12x_2x_3 - 9x_3^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
&= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 2x_2^2 - 8x_2x_3 - 8x_3^2 = \\
&= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2^2 + 4x_2x_3) - 8x_3^2 = \\
&= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 + 2x_3)^2 + 8x_3^2 - 8x_3^2 = \\
&= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 + 2x_3)^2 \\
&= z_1^2 - 2z_2^2 + 0z_3^2
\end{aligned}$$

där

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ z_2 = \quad x_2 + 2x_3 \\ z_3 = godt.t.ex.x_3 \end{cases} \quad \text{INDEFINIT} \quad \begin{aligned} x_1 &= z_1 - 2z_2 + 1z_3 \\ x_2 &= \quad z_2 - 2z_3 \\ x_3 &= z_3 \end{aligned} \quad \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ej ON-matris}$$

System av differentialekvationer

Modellproblem 1: Sök $x_1(t), x_2(t) \in C^1(\mathbb{R})$ så att

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1(t) - 7x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases}, \qquad \text{där} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 8 \\ x_2(0) = 3 \end{cases}$$

Rep Samtliga lösningar till diff.ekv. $\mathbf{y}' = \mathbf{ky}$ kan skrivas som $\mathbf{y} = Ce^{kt}$

$$\boldsymbol{y}'(t) - \boldsymbol{ky}(t) = 0$$

Integrerande faktor är e^{-kt}

$$e^{-kt}\,\boldsymbol{y}'(t) - e^{-kt}\boldsymbol{ky}(t) = e^{-kt} \cdot 0$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(e^{-kt}\boldsymbol{y}(t)) = 0$$

$$\int \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(e^{-kt}\boldsymbol{y}(t))\,\boldsymbol{dt} = \int 0\,\boldsymbol{dt}$$

$$e^{-kt}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,e^{+kt}$$

System av differentialekvationer

Modellproblem 1: Sök $x_1(t), x_2(t) \in C^1(\mathbb{R})$ så att

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1(t) - 7x_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1(t) - 5x_2(t) \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{cases} x_1(0) = 8 \\ x_2(0) = 3 \end{cases}$$

Skriv systemet på matrisform

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1{}'(t) \\ x_2{}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = AX(t)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = AX(t)$$

Begynnelsevillkoret:

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Variabelbyte

- Låt $\underline{\mathbf{f}}$ vara en ny bas och $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$
- De gamla koordinaterna $X = TY$, där Y är nya koordinaterna, d.v.s.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = TY(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) \\ a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) \end{pmatrix}$$

- Derivering ger

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}y_1'(t) + a_{12}y_2'(t) \\ a_{21}y_1'(t) + a_{22}y_2'(t) \end{pmatrix} = TY'(t)$$

- Substitution in den ursprungliga ekvationen ger

$$TY'(t) = X'(t) = AX(t) = ATY(t)$$

$$\Rightarrow \quad Y'(t) = T^{-1}AT \cdot Y(t)$$

- D v s koefficientmatrisen i den nya basen blir

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T$$

- Följaktligen, om $A_{\underline{\mathbf{e}}}$ är diagonaliserbar så väljer vi $\underline{\mathbf{f}}$ som en egenbas till $A_{\underline{\mathbf{e}}}$, därmed blir $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ en diagonalmatris!

Modellexempel (forts.) $X'(t) = AX(t),\ A = A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ och $X(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Beräknar egenvärden till $A_{\underline{\mathbf{e}}}$: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$

$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad A \text{ är diagonaliserbar}$$

Söker egenvektorerna (egenbas):

- för $\lambda_1 = -3$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4+3 & -7 & 0 \\ 2 & -5+3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -7 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- för $\lambda_2 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 4-2 & -7 & 0 \\ 2 & -5-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -7 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ T^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Alltså

$$X' = TY' = A_{\underline{\mathbf{e}}}X = A_{\underline{\mathbf{e}}}TY = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} TY$$

$$\Leftrightarrow \quad Y' = \left(T^{-1}A_{\underline{\mathbf{e}}}T\right)Y = A_{\underline{\mathbf{f}}}Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1' = -3y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^{-3t} \\ y_2 = C_2 e^{2t} \end{cases}$$

Allmän lösning:

$$X(t) = TY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-3t} \\ C_2 e^{2t} \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t}\mathbf{f}_1 + C_2 e^{2t}\mathbf{f}_2 = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Begynnelsevillkoret : $X(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{-3\cdot 0} + 7C_2 e^{2\cdot 0} \\ C_1 e^{-3\cdot 0} + 2C_2 e^{2\cdot 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 7C_2 \\ C_1 + 2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad X(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sammanfattningsvis. Ett ekvationssystem av diff.ekv, tex.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(t) + 2x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}, \qquad \text{där} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Har följande lösningsgång:

- Skriv systemet som $X' = AX$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- Variabelbyte $X = TY$ ger $TY' = ATY \Leftrightarrow \ Y' = (T^{-1}AT)Y = A_{\mathbf{f}}Y = DY$
- Bestäm egenvärden och egenvektorer till A samt transformationsmatrisen T. Bestäm D och T^{-1}
- Lös det diagonaliserat system $Y' = DY$
- Återgå till de ursprungliga koordinaterna, $X = TY$, dvs *skriv lösningen på allmänform*
- Lös begynnelsevillkoren och skriv upp ditt svar

Genomgång av tenta?