Vakna med linjär algebra

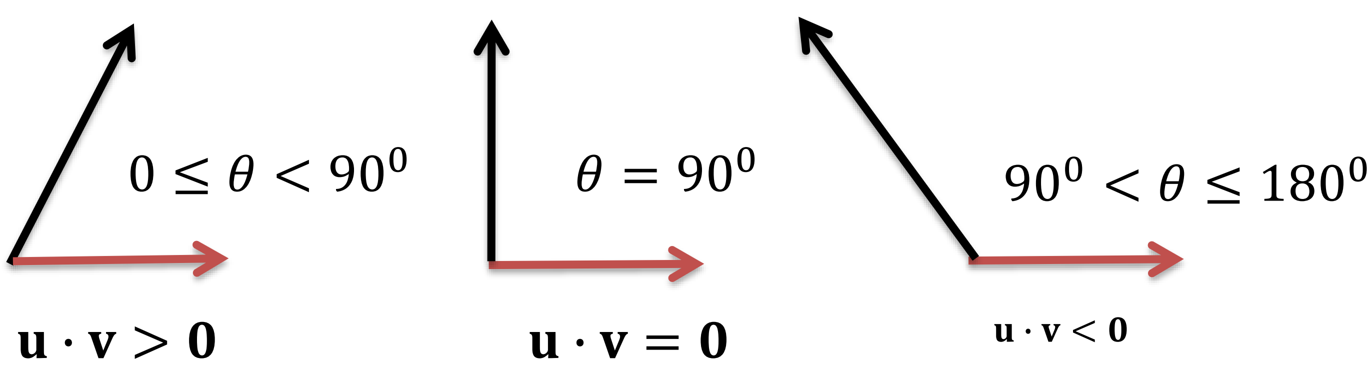
- Skalärprodukt
- Ortogonalprojektion
- Vektorprodukt

Skalärprodukt, sid 25

Definition 2.5.1. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två nollskilda vektorer i planet eller rummet. Skalärprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ definieras $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ som 0.



Skalärprodukten i en ON-bas

Skalärprodukten i en ON-bas

i planet: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1\, y_1 + x_2 y_2$

i rummet: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1\, y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

T.ex. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 4$

Vektorer är ortogonala (vinkelräta) om deras skalärprodukt är 0

Skalärprodukt: räknelagar

Sats 2.5.3. För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ och skalärer λ gäller

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Exempel 4. Bestäm längden av $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$
om $|\mathbf{u}|=1$, $|\mathbf{v}|=4$ och vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $2\pi/3$.

Lösning. Sök $|2\mathbf{u}-\mathbf{v}|$! Ett knep använd $|2\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2$

$$(2\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(2\mathbf{u}-\mathbf{v})=4\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=$$

$$=4\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=$$

$$=4|\mathbf{u}|^{\mathbf{2}}-4|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos\frac{2\pi}{3}+|\mathbf{v}|^{\mathbf{2}}=$$

$$=4\cdot1-4\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4^2=28$$

Följaktligen är

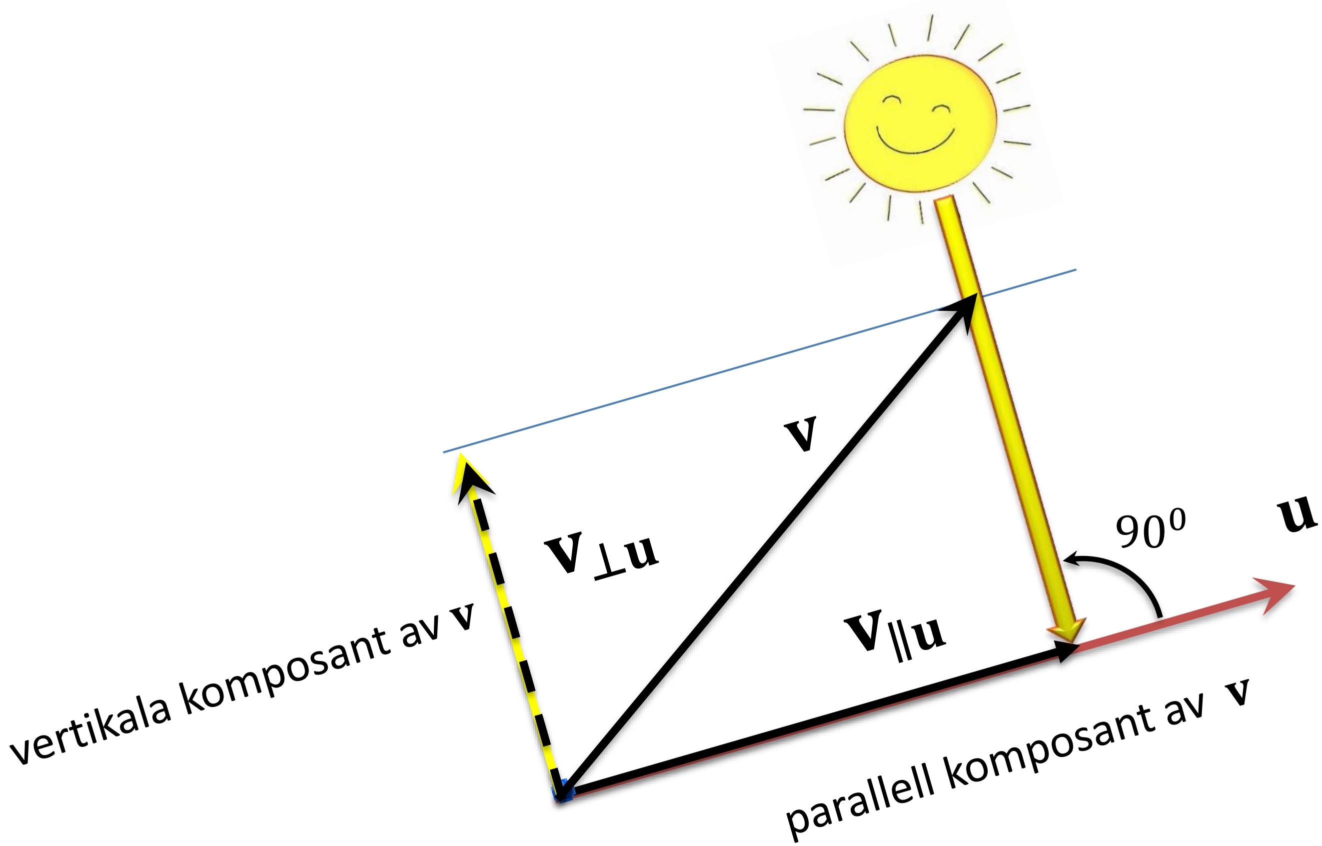
$$|2\mathbf{u}-\mathbf{v}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

Ortogonal projektion

Vi börjar med två godtyckliga vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i planet

Huvudfråga: hur stor del av $\mathbf{v}$ pekar i $\mathbf{u}$:s riktning?

Obs! Den *ortogonala* projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ är *parallell* med $\mathbf{u}$

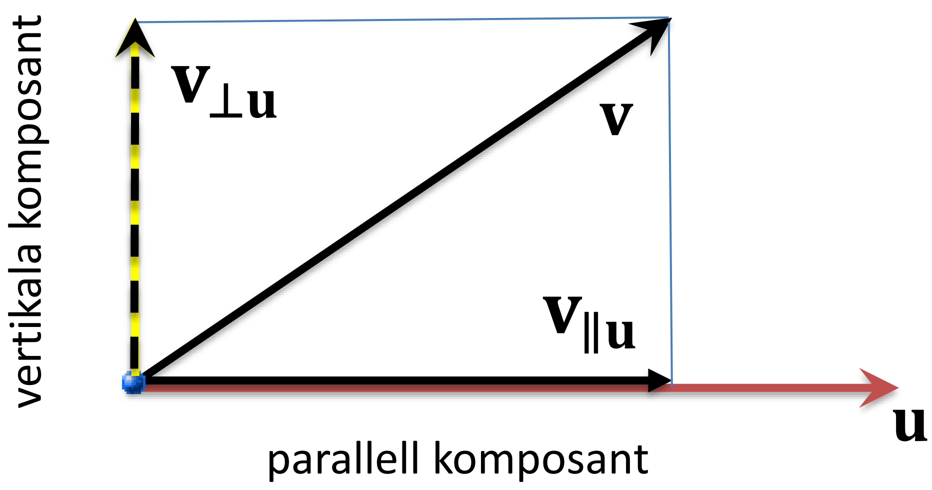


Ortogonal projektion

Obs! Den ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ är parallell med $\mathbf{u}$

Sats 2.5.5. **Projektionsformler**

- $\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\,\mathbf{u}$ (den ortogonala projektionen)
- $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel\mathbf{u}}$ (den vertikala komposanten)



Exempel. Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ på $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och dela upp $\mathbf{v}$ i komposanter $\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{u}}$ och $\mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}}$

Lösning. Projektionsformeln ger $\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\, \mathbf{u}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 4$$

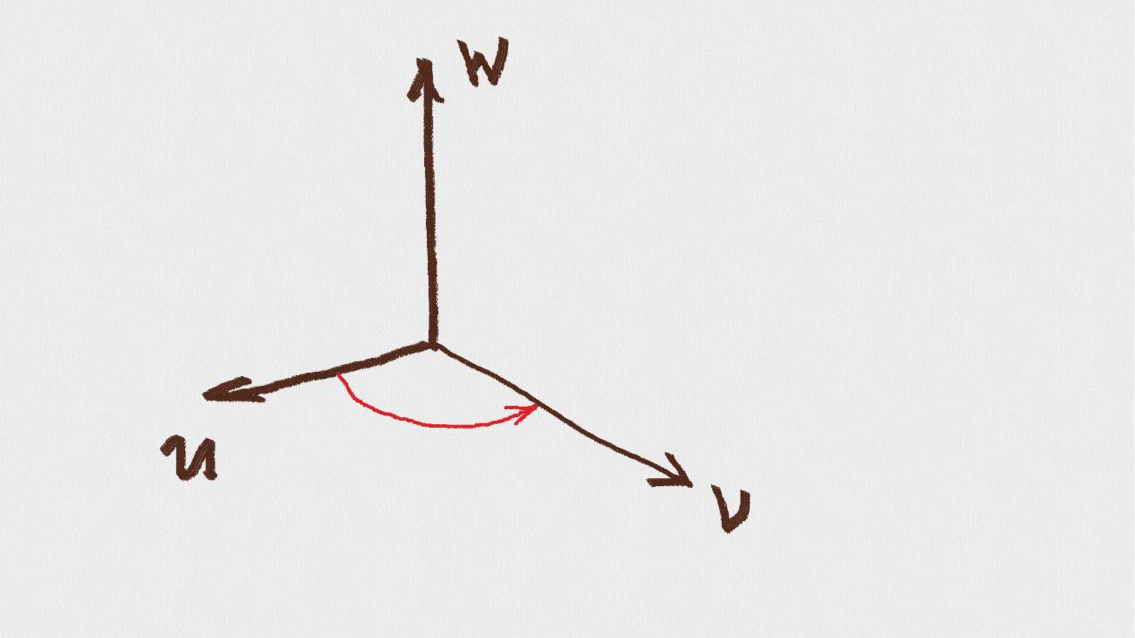
$$|\mathbf{u}|^{\mathbf{2}} = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\mathbf{v}_{\parallel \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\, \mathbf{u} = \frac{4}{2}\, \mathbf{u} = 2\, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{\perp \mathbf{u}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Högersystem

Vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^3$ säges vara ett högersystem (positivt orienterat) om den minsta vridning som överför $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ ses moturs från spetsen av $\mathbf{w}$.

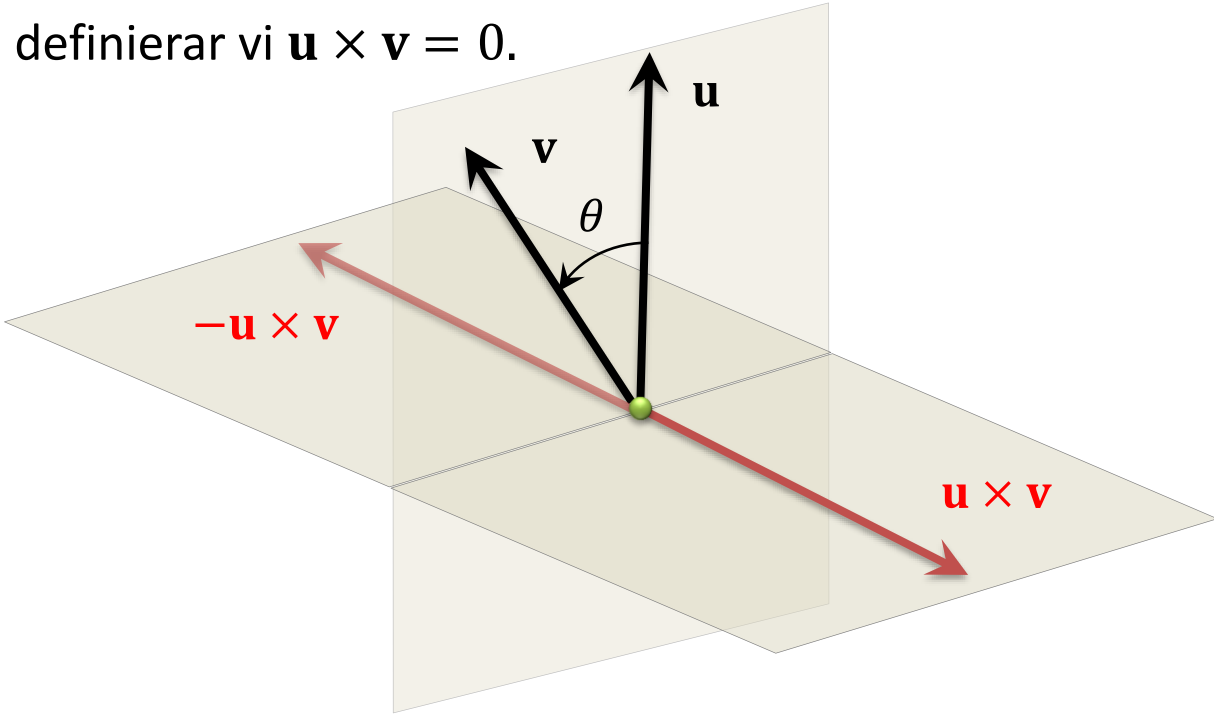


ett högersystem

Vektorprodukt (kryssprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara två icke-parallella vektorer i $\mathbb{R}^3$ och θ vinkeln mellan dem. Vektorprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ betecknas $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och är en ny vektor sådan att

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta$
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ett högersystem
- Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella definierar vi $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$.



Räknelagar

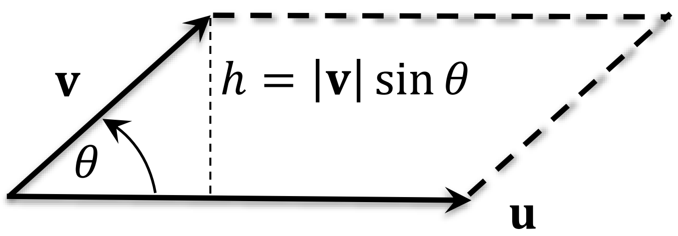
För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i rummet och alla skalärer λ gäller

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (Anti-kommutativa lagen)
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ (Distributiva lagen)
- $(\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) = \lambda\, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$

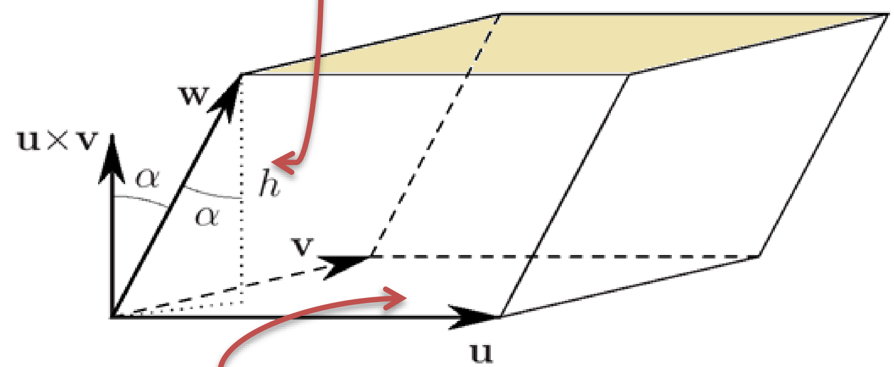
Kryssprodukt har vi till att konstruera en vektor vinkelrät mot två givna.

Volym och area

$$\boxed{\text{Area} = |\mathbf{u}| \cdot h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$



$h = |\mathbf{w}| \cos\alpha$



Figur 2.30: Volymprodukt.

Basyta $= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

$$\boxed{V = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \cdot h = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos\alpha = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}$$

Definition. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ kallas för **volymprodukten/ trippelprodukt.**

Sats 2.7.2. Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är tre vektorer i rummet så gäller:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ är ett högersystem}$$
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ är ett vänstersystem}$$
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ligger i samma plan}$$

Exempel. Beräkna arean av den parallellogram som har hörn i origo, $P(1,1,0)$, $Q(0,0,2)$ och $R(1,1,3)$.

Lösning. Observera att ortsvektorerna uppfyller 'parallellogram villkoret':

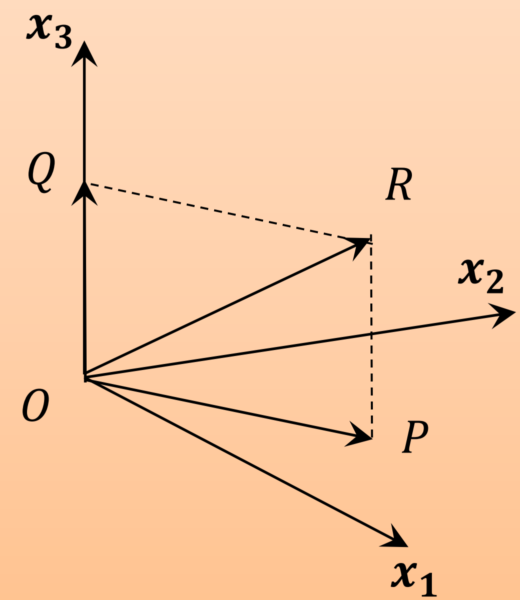
$$\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{OR}$$

Så har vi för ortsvektorernas koordinater:

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OP} \times \overline{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}$$



Således $A = |\mathbf{OP} \times \boldsymbol{OQ}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}\, a.e.$

Nu är vi piggare…