Lektion 4

Vakna med lin-alg

- Linjer i planet och rummet
  - Representationsformer
  - Spegling av en punkt
  - Avståndsberäkningar

Linjer i planet/rummet

Hur kan vi representera en linje?

<u>Linjer i planet (endast)</u>

- riktningskoefficient
- en punkt

Ex.: $y = 1 - 3x$

Alternativt (på normalform)

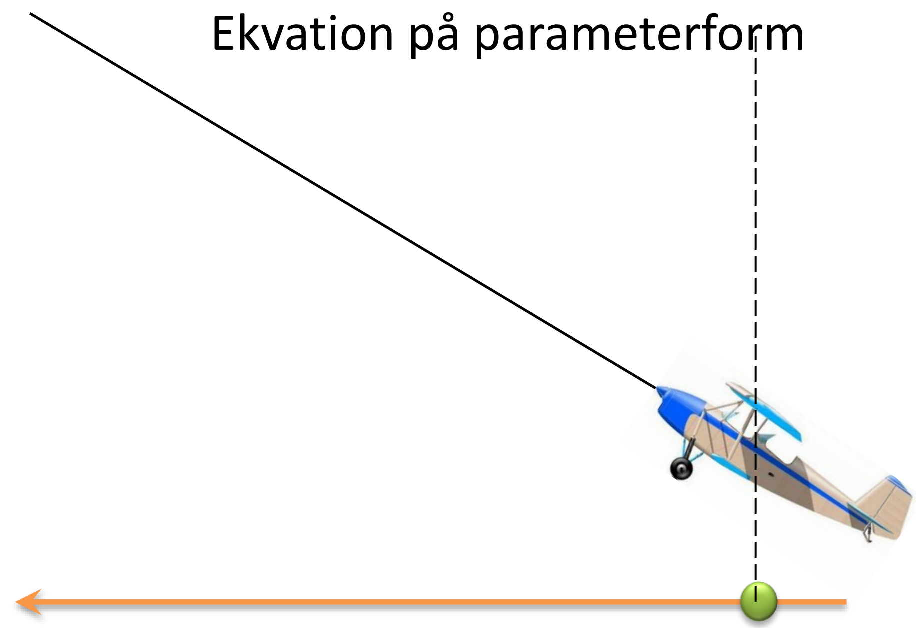
- normalriktning
- en punkt

Ex.: $4x + 7y = 12$

<u>Linjer i planet / rummet</u>

- antigen två punkter
- eller riktningsvektor och en punkt

Ekvation på parameterform



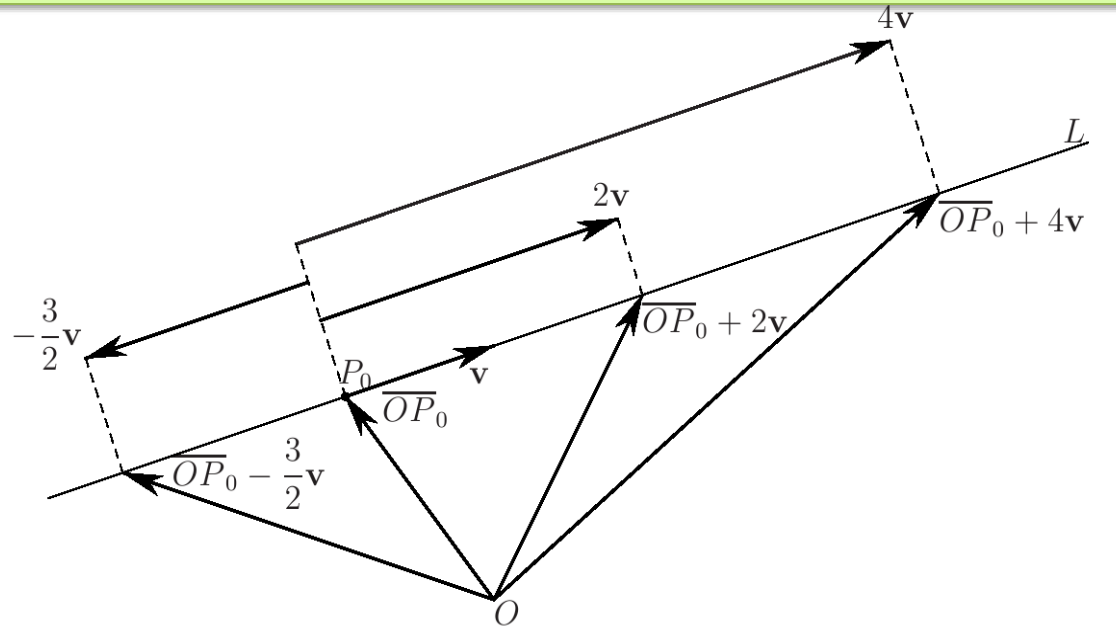
t (en parameter)

Linjer i planet/rummet

<u>Planet / rummet:</u> Ekvation på **parameterform** ($t \in \mathbb{R}$)

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} \quad + \quad t\,\mathbf{v}$$



Figur 2.32: Ortsvektorer för punkter på linjen då $t = -\frac{3}{2}$, 0, 2, 4.

Exempel 1. Låt *L* vara linjen $y = 2x - 3$. Ange linjens ekvation på parameterform.

Lösning: Sätt x$=$ t där t ϵ R => $y = 2t - 3$

dvs $\begin{cases} \text{x} = 0 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$+t$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exempel 2. Avgör om linjer

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x $= 1 - t$ = 1+s
$y = 0 + t = 0 + s$

ger att s=t=0 och
$z = 0 \neq -1$

a) skär varandra

b) parallella?

Spegling av en punkt i en linje

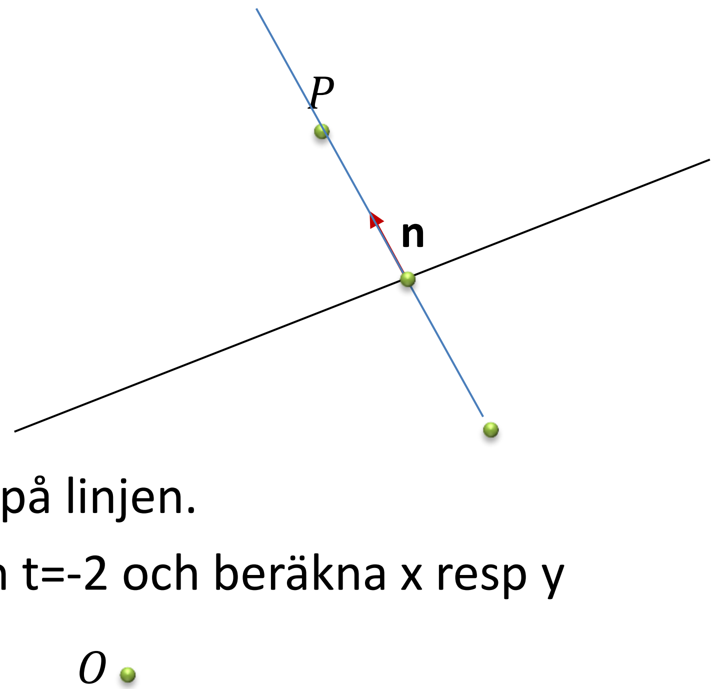
Exempel. Bestäm spegelbilden av P= (1,2) $i\ L$

$$L: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \ - \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

Lösning. Sök **n** !

$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Låt L_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$+t$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



För vilket t värde korsar L_2 L?

Sätt in x =1 + t och y = 2 +t i L

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \ -$ 1= (1 + t) + (2 +t) - 1 =0

Dvs t=-1 vilket medför att punkten (0, 1) ligger på linjen.

Dubblas t-värdet ger detta spegelbilden. Sätt in t=-2 och beräkna x resp y

Svar: (-1, 0)

Exempel. Bestäm den punkt Q på linjen

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som ligger närmast $P = (2,1,2)$ samt avståndet mellan P och Q.

Lösning.

$$\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

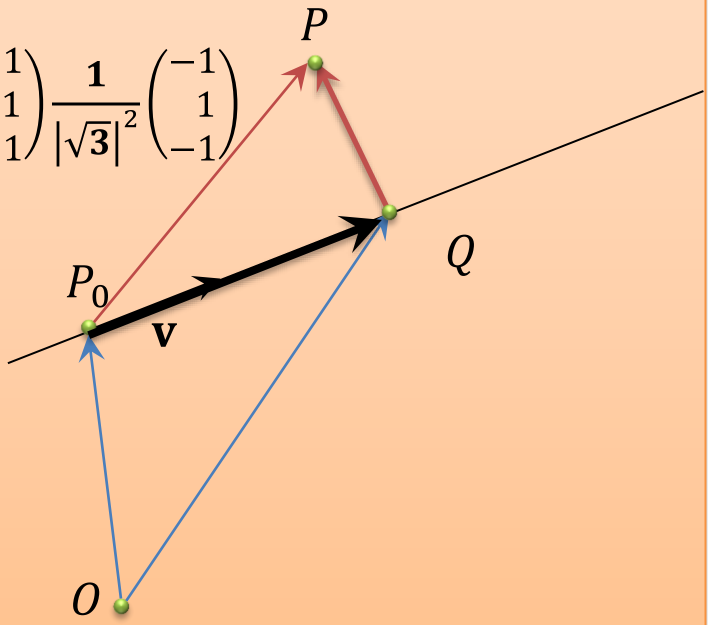
$$\overline{P_0Q} = \left(projektionssatsen\ \overline{P_0Q} = \frac{\overline{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \right) = \overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{|\sqrt{\mathbf{3}}|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)}{|\sqrt{\mathbf{3}}|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P_0Q} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP_0} + \overline{P_0Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3+2 \\ 0-2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{QP}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{42}}{3}$$



Om man inte vaknar till tuppen, utan till lin-alg, blir man pigg som en …