Lektion 7

Fredagsgodis

- Matriser
  - Räkneoperationer och räknelagar

Matriser

Definition. Låt r och k vara heltal ≥ 1. En $r \times k$-matris ($m \times n$-matris) består av $r \cdot k$ stycken element ordnade i ett rektangulärt schema enligt nedan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rk} \end{pmatrix}$$

$r \times k$ kallas format eller typ:

$$(r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13})_{1x3} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2x2} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$$

radmatris kvadratiska matriser kolonnmatris

- a_{ij}: där i anger i vilken rad och j i vilken kolonn element står
- Matriser betecknas med stora bokstäver: A, B, ...
- Diagonalmatriser, t.ex.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Räkneoperationer

Definitioner.

(**Likhet**) Matriser $A = \left(a_{ij}\right)_{r\times k}$ och $B = \left(b_{ij}\right)_{r\times k}$ är lika, d v s $A = B$ om

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{för alla} \quad i,j\colon 1 \le j \le r,\ 1 \le j \le k$$

(**Addition**) Låt $A = \left(a_{ij}\right)_{r\times k}$ och $B = \left(b_{ij}\right)_{r\times k}$ vara matriser av samma format. Summan av A och B definieras som

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{r\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} + b_{r1} & \cdots & a_{rk} + b_{rk} \end{pmatrix}$$

(**Multiplikation med reellt tal**) Låt $A = \left(a_{ij}\right)_{r\times k}$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkten av A och λ definieras som

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{r\times k} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \cdots & \lambda a_{rk} \end{pmatrix}$$

Räkneoperationer

Exempel 1.

(**Addition**)

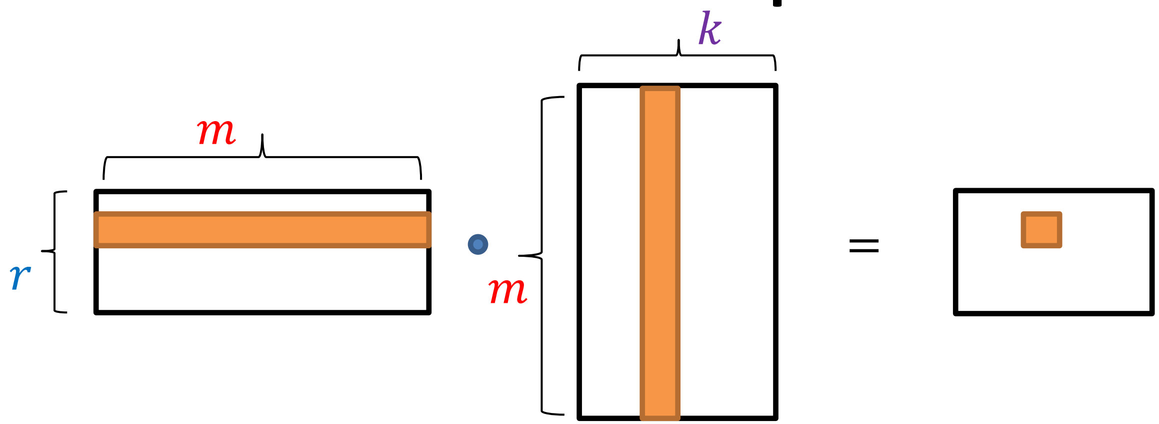
Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A+B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(**Multiplikation med reellt tal/ bryta ut ett reellt tal**)

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 16 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrismultiplikation



Låt $A = (a_{ij})_{r\times m}$ och $B = (b_{ij})_{m\times k}$. Då definieras **produkten** A och B som $r \times k$ matris C där

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Exempel 2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 4\cdot 8 & 1\cdot 9 + 4\cdot 10 \\ 2\cdot 7 + 5\cdot 8 & 2\cdot 9 + 5\cdot 10 \\ 3\cdot 7 + 6\cdot 8 & 3\cdot 9 + 6\cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 49 \\ 54 & 68 \\ 69 & 87 \end{pmatrix}_{3x2}$$

OBS! I detta fall är produkt $B \cdot A$ ej definierad!

Matrisprodukt skiljer sig från produkt mellan reella tal: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Räkneoperationer

- För kvadratiska matriser definieras **heltalpotens** på samma sätt som för reella tal, d v s om A är en $n \times n$ matris så definieras

$$A^2 = AA, \qquad A^3 = AAA = A^2A \quad \text{etc}$$

- **Enhetsmatriser** (enbart ettor står på huvuddiagonalen):

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{etc}$$

Låt A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$AI = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Räkneoperationer

Låt A, B, C vara matriser av samma format.

För **addition** av matriser gäller:

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) Det finns en matris av varje typ $r \times k$ som kallas *nollmatrisen* och tecknas 0 sådan att för alla $r \times k$-matriser A gäller $A + 0 = A$
4) Till varje $r \times k$-matris A finns en $r \times k$-matris A' sådan att $A + A' = 0$.

Låt A, B, C vara matriser för vilka respektive operationer är definierade.

För **multiplikation** gäller:

1) $(AB)C = A(BC)$
2) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB), \lambda \in \mathbb{R}$
3) $A(B + C) = AB + AC$ och $(B + C)A = BA + CA$
4) $IA = AI = A$, där A är en kvadratisk matris och I är enhetsmatrisen av samma typ

Transponat och transponering

Låt $A = \left(a_{ij}\right)_{r\times k}$ vara en $r \times k$-matris. $k \times r$ matrisen $A^t = \left(a_{ij}^t\right)_{k\times r}$ kallas **transponatet** av A och definieras ur A genom att

$$a_{ij}^t = a_{ji} \text{ för alla } i, j\text{:}\ \ 1 \le i \le r, 1 \le j \le k$$

Exempel 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 2 & e \\ 3 & \ln 2 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi & e & \ln 2 \end{pmatrix}$$

Exempel 4. Låt $\boldsymbol{e}$ vara en ON bas i rummet och $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Då är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{\boldsymbol{t}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^t\, \boldsymbol{v}$$

Transponat och transponering

Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ vara en $r \times k$-matris. $k \times r$ matrisen $A^t = (a^t_{ij})_{k\times r}$ kallas **transponatet** av A och definieras ur A genom att

$$a^t_{ij} = a_{ji} \text{ för alla } i, j\text{:}\ \ 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq k$$

Räknelagar för transponering

- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(\lambda\, A)^t = \lambda A^t$
- $(A^t)^t = A$
- $(AB)^t = B^t A^t$ (OBS! Ordningen)
- En (kvadratisk) matris A kallas symmetrisk om $A^t = A$

Exempel 5. Är A och/eller B symmetrisk?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Nu till era fredagsfrågor