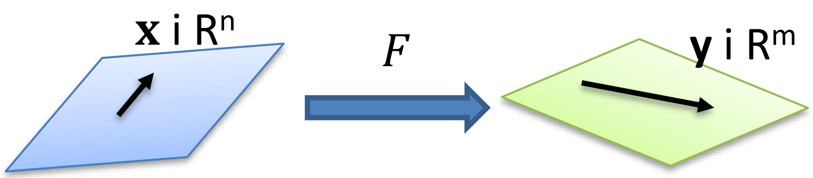
Lektion 8

En härlig morgon med lin-algebra

- Linjära avbildningar och matriser

Linjära avbildningar



Definition 2.9 Låt A vara en *m x n* matris. Den avbildning som till varje vektor **x** i R^n tillordnar vektor **y** i R^m genom operationen

- $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$

Vilket kallas en ***linjär* avbildning** från R^n till R^m**.**

A kallas **avbildningsmatrisen**

Exempel 1.

Låt A= $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$ detta ger en linjär avbildning från R^2 till R^3 ty A**x**= $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$**=** $\begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$=**y**

x ϵ R^2 (varför?)

y ϵ R^3

Exempel på **linjära** avbildningar

- Identitetsavbildningen: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{x}$
- Sträckning,$A\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Ortogonal projektion på vektor, $A\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$
- Spegling
- Vridning

Exempel på **linjära** avbildningar

- Identitetsavbildningen: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{x}$

Exempel. 2
Vi vet att **Ix** =**x**

- $I\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$ dvs identitetsavbildningen i detta fall ges av A=I ...(men kan du finna andra A så att A**x=x** i exemplet ovan**?)**

- Sträckning,$A\boldsymbol{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

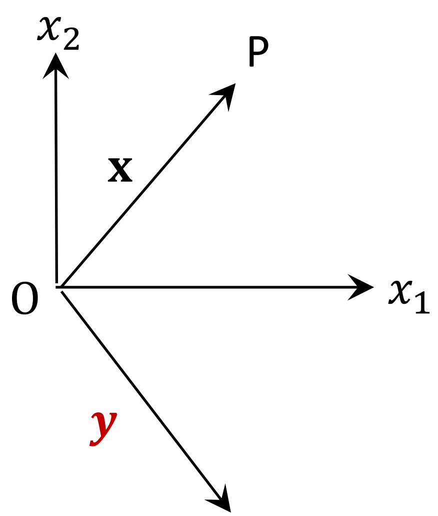
Exempel. 3
Vi känner till att λ**Ix** =λ**x**

T.ex. $3I\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{x}$ dvs avbildningen ges i detta falla av A=3I....(men kan du finna andra A så att $A\boldsymbol{x} = \mathbf{3x}$?)

Exempel på **linjära** avbildningar

Exempel. 4

Vad betyder avbildningsmatrisen A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ geometriskt?



$$\mathbf{P} = (x_1, x_2)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

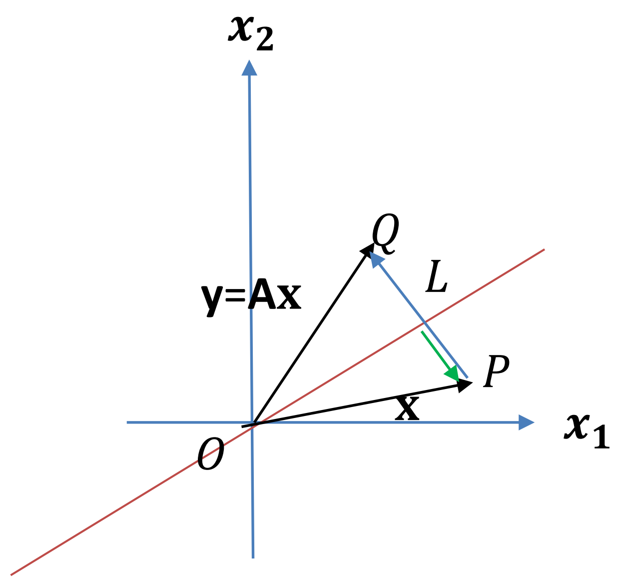
$$\boldsymbol{y} = A\mathbf{x} \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Svar: Spegling i x_1-axeln

Exempel 5. En avbildning definieras genom att varje vektor i planet speglas i linjen l: $x_1 - 2x_2 = 0$. Visa att avbildningen är linjär och bestäm dess matris.

Lösning. Vi vet att normalvektor till linjen l är $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Projektionssatsen ger LP $= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}$



PQ$=-2\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}$

Vektorn **x** = OP , OQ=OP+PQ

Vi söker **y** = A**x** = OQ=OP+PQ =**x**- **2**$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$ **n=**

=[omskrivning av skalärprodukt]= x- 2$\frac{x^t \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$ **n= x- 2**$\frac{n^t \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}$ **n=**

= **x- 2n** $\frac{n^t \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2} =$ **(I-** $\frac{2\mathbf{n}n^t}{|\mathbf{n}|^2}$)**x**

A= I- $\frac{2\mathbf{n}n^t}{|\mathbf{n}|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Sats 2.4 *(Bassatsen)* Låt $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ vara en linjär avbildning från R^n till R^m.

Då gäller att:

A = $(A\boldsymbol{e_1}\ A\boldsymbol{e_2} \ldots A\boldsymbol{e_n})$ $där$ $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ är standardbaserna

Exempel 6. Bestäm en linjär 3x3 avbildningsmatris där $\boldsymbol{e_1}$ avbildas på $\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{3e_3}$, $\boldsymbol{e_2}$avbildas på $\boldsymbol{e_1}$ och slutligen $\boldsymbol{e_3}$ avbildas på sig själv.

Lösning:

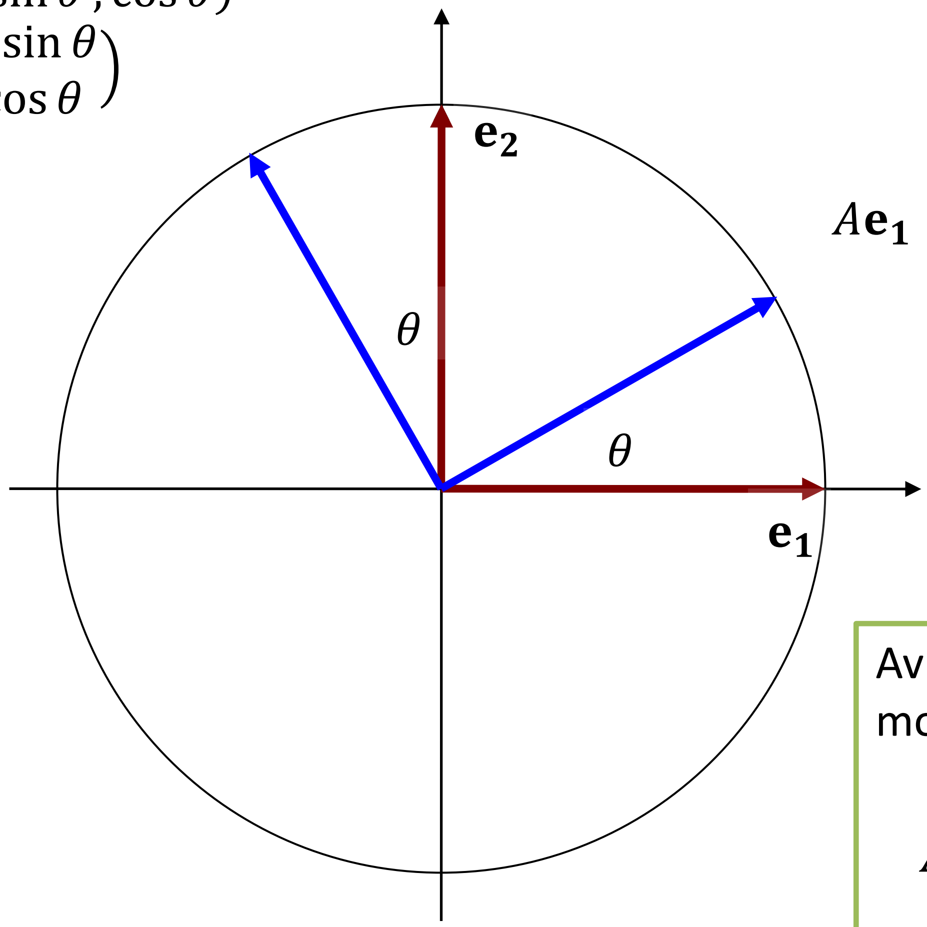
$$A\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{3e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad A\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sats 2.4 ger:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vridning i planet

$$A\mathbf{e_2} = (-\sin\theta\,, \cos\theta)$$
$$= \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$A\mathbf{e_1} = (\cos\theta, \sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Avbildningsmatris för en vridning moturs i en ON bas är

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

FRÅGESTUND