Överbestämda ekvssystem

Ex 1 Betrakta

$$(*)\quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

(1) Lös i vanlig mening:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2),\ \times(-3) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \overset{\times(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \emptyset$$

$0\ 0 \mid 3$, $3 \neq 0$

inga vanliga lösningar

(2) Obs (#): $A \cdot X = B$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(1) \Longrightarrow \quad AX - B \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall X \in R^2$$

<u>Sats:</u> Det finns X^* s.a.

$$|AX^* - B| = \min\{|AX - B| : X \in R^2\}$$

X^* kallas <u>minsta kvadratlsg</u> för (#)

<u>Sats</u>. X^* är lsg till

(##) $(A^t \cdot A)X = A^t \cdot B$ (<u>normalekvationerna</u>).

Lös (#) i minsta kvadrat mening:

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^t \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(##): $$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -3 & 10 \\ -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 14 & -3 & 10 \end{array}\right] \times(-14) \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 25 & 10 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow y = 2/5,\ x = 4/5$$

d.v.s $$X^* = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fråga: Finn $\min\{|AX-B| : X \in \mathbb{R}^2\} = m$

$$m = |AX^* - B|,$$

$$AX^* - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\underline{m = \sqrt{3}}$.

Ex 2 Bestäm $y = kx + b$ som bäst approximerar data i minsta kvadrat mening.

x	-1	0	1	2
y	0	1	1	2

Sätt systemet:

$$\begin{cases} k\cdot(-1) + b = 0 \\ k \cdot 0 + b = 1 \\ k \cdot 1 + b = 1 \\ k \cdot 2 + b = 2 \end{cases}$$

Inför matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gör som ovan för att bestämma k, b.

Ex 3 Bestäm $y = ax^2 + bx + c$

som bäst approximerar data

i minsta kvadrat mening.

(samma data som i Ex 2).

Sätt systemet

$$\begin{cases} a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 0 \\ a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 1 \\ a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 1 \\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 2 \end{cases}$$

Inför matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gör som ovan för att bestämma

a, b, c.