def: Låt V vara ett vektorrum o $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ vektorer i V.

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ är lin. oberoende om ekv $x_1 \cdot \bar{v}_1 + \dots + x_n \cdot \bar{v}_n = \bar{0}$ har precis en lsg $(x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$.

Annars, $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ är lin. beroende

Sats $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ är lin. beroende $\iff$ en av vektorerna kan skrivas som en linjär kombination av övriga.

Ex. Låt $\bar{v}_1 = (1,2,3,4)$, $\bar{v}_2 = (2,1,3,5)$, $\bar{v}_3 = (3,-5,-2,1)$ från R^4. Är vektorerna lin. oberoende?

$x_1 \cdot \bar{v}_1 + x_2 \cdot \bar{v}_2 + x_3 \cdot \bar{v}_3 = \bar{0} \iff$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{-2,-3,-4}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = t$, $x_2 = -\frac{11}{3}t$

$x_1 = -2\left(-\frac{11}{3}t\right) - 3t = \frac{13}{3}t$

$\frac{13}{3}t \cdot \bar{v}_1 - \frac{11}{3}t \cdot \bar{v}_2 + t \cdot \bar{v}_3 = \bar{0} \Leftarrow$

Om $t = -1$ så är $\bar{v}_3 = -\frac{13}{3}\bar{v}_1 + \frac{11}{3}\bar{v}_2$

def: $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ är en bas för V

om 1) $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ är lin. oberoende

2) $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ spänner up V dvs

$\forall \bar{v} \in V \ \exists \ k_1, \ldots, k_n$ s.a. $\bar{v} = k_1 \cdot \bar{v}_1 + \ldots + k_n \cdot \bar{v}_n$.

(Obs $k_1, \ldots, k_n$ är entydigt bestämda) kallas koordinater för $\bar{v}$ i basen.

Ex. $V = R^n$, $\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ är en bas för R^n.

Sats $V = R^n$ o $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ vektorer i R^n

$\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ utgör en bas för $R^n \Leftrightarrow$

$n = m$ o $\det[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n] \neq 0$

Ex. $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{v}_2 = (2, 3, 5)$, $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$ $\bar{v}_4 = (2, -1, -4)$. Är $\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\ \bar{v}_4$ en bas för R^3? Svar: nej. (varför?)

Sats V är ett vektorrum.

$\Leftrightarrow$ det finns en ändlig bas i V.

Om $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ är en bas för V $\Leftrightarrow$

$\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ — " — så är

$n = m$.

def. $\dim V$ = antalet av element i en ändlig bas.

Ex. 1) $\dim R^n = n$.

2) $\bar{v}_1 = (1,2,3,4)$, $\bar{v}_2 = (2,1,3,5)$, $\bar{v}_3 = (3,-5,-2,1)$ i R^4. Betrakta vektorrum $V = \{k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3\}$, $k_i \in R$ med operationerna från R^4.

Finn $\dim V$:

Obs (till ex.) $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ utgör en bas för V $\Rightarrow$ $\dim V = 2$. (varför?)