Inversa matriser

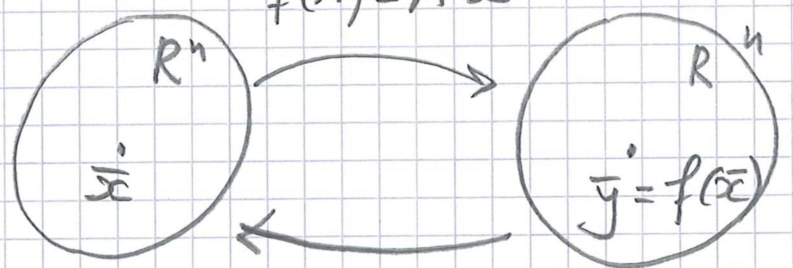
A är en $(n \times n)$ matris (Obs kvadratisk)

def. A har en invers matris om det finns en $(n \times n)$ matris B s.a.

$$A \cdot B = B \cdot A = E \qquad (E \text{ enhetsmatris})$$

Obs

$$f(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$$



$$\exists\, f^{-1}(\bar{y}) = B \cdot \bar{y}$$

F: Hur avgör man att A har en invers?

- Gausselimination $(\bar{y} = A\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = B\bar{y})$
- $\det A \neq 0$

F: Hur hittar man inversen till A?

$$[A|E] \xrightarrow[\text{elimination}]{\text{Gauss Jordan}} [E|B]$$

Obs $B = A^{-1}$ (Beteckning)

EX. Avgör om följande matriser är inverterbara. Om svaret är ja finn inversen.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs $\det A_1 = 0$
$\Rightarrow$ det finns ingen invers för A_1.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs $\det A_2 = 1 \cdot 4 \cdot 2 = 8 \neq 0$
$\Rightarrow A_2^{-1}$ existerar.

Finn A_2^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \times\frac{1}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \times(-3),(-5) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \times\frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \times(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

$$\underbrace{}_{E} \qquad \underbrace{}_{A_2^{-1}}$$

Gör kontroll enligt definitionen:

Obs (det räcker med en likhet)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \text{ (ok!)}$$

Några egenskaper till:

- $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- Om det finns en matris C s.a. $AC = E$ (eller $C \cdot A = E$) så $C = A^{-1}$.

Ex Anta A satisfierar ekv $A^2 + 3A + E = 0$

Visa att A är inverterbar o finn A^{-1}!

Ok $E = -A^2 - 3A = A \cdot (-A - 3E) \Rightarrow A^{-1} = -A - 3E$