L15.

A är en kvadratisk matris

En icke-trivial vektor $\bar{v}$ kallas en egenvektor till A om

$A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$ för något tal λ

λ kallas ett egenvärde till A som svarar mot $\bar{v}$.

Obs $A\bar{v} \parallel \bar{v}$ i fallet.

F. Hur hittar man egenvärde o egenvektorer till en matris?

Obs $A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Leftrightarrow A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0}$

eller $(A - \lambda E) \cdot \bar{v} = \bar{0}$ (homogent) $(*)$

$(*)$ har icke-triviala lsgar $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

$\Rightarrow$ • Egenvärde är lsgar till ekv $|A - \lambda E| = 0$ (en skalär ekv)

- Om λ är ett egenvärde så lös (*) för att bestämma egenvektorer.

EX. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Finn egenvärde o egenvektorer.

Lsg: • $|A - \lambda E| = 0$ eller

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 2, 4.$$

- $\lambda_1 = 2$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} x_1 \; x_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$ $(x_1 + x_2 = 0)$

$x_2 = t,\ x_1 = -t \implies \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0}$

egenvektorer ~ 2

- $\lambda_2 = 4$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} x_1 \; x_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$ $(x_1 - x_2 = 0)$

$x_2 = t,\ x_1 = t \implies t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0$

egenvektorer ~ 4

<u>Obs</u>. • $\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det[\bar{p}_1 | \bar{p}_2] = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ <u>utgör en bas</u> för R^2

• $\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = 0 \Rightarrow \bar{p}_1 \perp \bar{p}_2$

• $\bar{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{p}_1$, $\bar{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{p}_2$

Så är $\bar{q}_1, \bar{q}_2$ <u>en ON bas för R^2</u>