Le 16

Basbyte

V ett vektorrum, $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ en bas för V,

$\bar{x} \in V$. **Obs** $\bar{x} = x_1 \cdot \bar{v}_1 + \ldots + x_n \cdot \bar{v}_n =$

$$= \underbrace{(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underline{G \cdot X}$$

X (koordinatmatris för $\bar{x}$ i G)

$\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n$ en bas till för V.

Obs $\bar{w}_1 = G \cdot W_1, \ldots, \bar{w}_n = G \cdot W_n$ $\underline{o}$

$$\underbrace{(\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n)}_{F} = G \cdot \underbrace{\left[W_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, W_n \right]}_{P} = G \cdot P$$

P (basbytesmatris från G till F)

Obs $\bar{x} = F \cdot Y = \underline{G \cdot P \cdot Y}$

$\Rightarrow \underline{X = PY}$

Ex. $V = R^2$. • Visa att $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{o}$ $\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är två baser för R^2.

• Finn basbytesmatris från G till F.

• $\bar{x}$ har koordinatmatris $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i G finn koordinatmatris Y i F för $\bar{x}$

Lsg: $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow G$ är en bas

$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1-0 = 1 \neq 0 \Rightarrow F$ är en bas.

$$W_1: \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$W_2: \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow W_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ <u>Obs</u> $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$$Y = P^{-1} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Avbildningsmatriser i olika baser.

$f: V \to V$ en linjär avb i vektorrummet V, $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ en bas för V o $\bar{x} \in V$.

$$f(\bar{x}) = f(x_1 \bar{v}_1 + \dots + x_n \bar{v}_n) = (f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= X}$$

$$f(\bar{v}_i) = \underbrace{(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)}_{= G} \cdot [f(\bar{v}_i)]_G, \quad i \le n.$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = G \cdot [\underbrace{[f(\bar{v}_1)]_G \mid \dots \mid [f(\bar{v}_n)]_G}_{= A}] \cdot X =$$

A (<u>avbildnsmatris i G</u>)

$$= \underline{G \cdot A \cdot X}$$

Låt $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ en bas till för V.

$$\bar{x} = \underbrace{(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)}_{= F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{= Y} = F \cdot Y, \quad \underline{F = G \cdot P} \text{ o}$$

$$f(\bar{x}) = F \cdot [\underbrace{[f(\bar{w}_1)]_F \mid \dots \mid [f(\bar{w}_n)]_F}_{= B}] \cdot Y =$$

$$= \underline{F \cdot B \cdot Y}$$

$$\Rightarrow G A \cdot X = F \cdot B Y = G P \cdot B \cdot P^{-1} X =$$

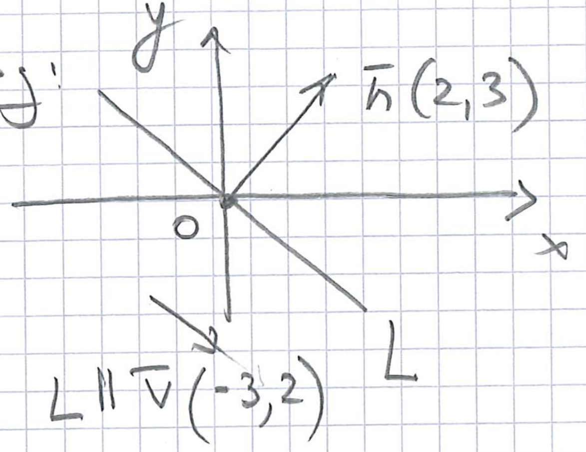
$$= G (P B P^{-1}) X \Rightarrow A = P \cdot B \cdot P^{-1}.$$

(samband mellan A o B).

Ex. $V = \mathbb{R}^2$, $L: 2x + 3y = 0$

Finn avbildn. matris $\underline{\underline{A}}$ för spegling $\underline{\underline{f}}$ i L (relaterat till $\underline{\text{standardbasen } \mathcal{E}}$.)

Lsg:



Inför en bas till

$$\underset{(\bar{v})}{\bar{w}_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{(\bar{n})}{\bar{w}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Obs • $f(\bar{w}_1) = \bar{w}_1 = 1 \cdot \bar{w}_1 + 0 \cdot \bar{w}_2$

$f(\bar{w}_2) = -\bar{w}_2 = 0 \cdot \bar{w}_1 - \bar{w}_2$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

• $\mathcal{F} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$, $\mathcal{F} = \mathcal{E} \cdot P$, där P är basbytematris från $\mathcal{E}$ till $\mathcal{F}$. $\Rightarrow$

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \underline{o} \quad P^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ -12 & -5 \end{bmatrix}$$