Le 17.

Ett dinamiskt system:

(*) $Y' = A \cdot Y$, där A är en $(n \times n)$ matris

Om $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ är egenvektorer till A med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ o $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ är lin. oberoende (bildar en bas för R^n) så är

$$c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \bar{p}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot \bar{p}_n$$

den allmänna lösningen till systemet (*).

EX 1. Betrakta (*) $Y' = A \cdot Y$, där A är (3×3) matris. Vektorerna $\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till A som svarar mot egenvärde $\underline{3}$ o vektorn $\bar{p}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till A som svarar mot egenvärde $\underline{5}$. Kan vi beskriva den allmänna lösningen till (*)?

②

Obs $\det\left[\bar{p}_1 \mid \bar{p}_2 \mid \bar{p}_3\right] = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} =$

$= 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24 \neq 0 \Rightarrow \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ utgör en bas

för R^3. Svar: ja;

den allmänna lsgen

$$Y(t) = c_1 \cdot e^{3\cdot t} \cdot \bar{p}_1 + c_2 \cdot e^{3\cdot t} \cdot \bar{p}_2 + c_3\, e^{5t} \cdot \bar{p}_3 ,$$

där c_1, c_2, c_3 är godtyckliga konstanter.

Kan vi ange matrisen A?

Obs A är diagonaliserbar

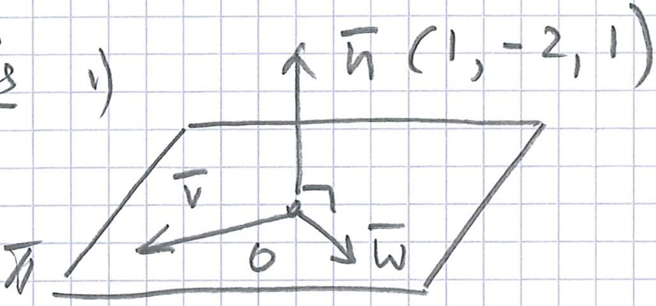
$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \text{ där } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$ Finn A själva.

EX 2 (*) $Y' = A \cdot Y$, där A är avbildningsmatris för ortogonala projektionen på planet $\pi: x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ relaterad till standardbasen.

Lös (*) utan att hitta matrisen A. 3

Obs 1)



$\bar{v}(2,1,0)$ (till ex.)

$\bar{w}(1,0,-1)$

2) Egenvärde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$A\bar{v} = \bar{v}$ o $A \cdot \bar{n} = \bar{0}$

$A\bar{w} = \bar{w}$

3) $\bar{v}, \bar{w}, \bar{n}$ är lin. oberoende egenvektorer för A.

Så är $Y(t) = c_1 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

där $c_1, c_2, c_2 \in R$.