# Vektorprodukt.

- $\bar{a}, \bar{b}$ är nollskilda vektorer i rummet. s.a. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$

  $\bar{a} \times \bar{b}$ är en vektor definierad av

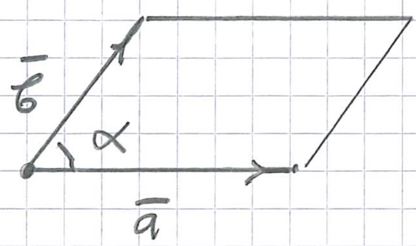
(i) $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{a}, \bar{b}$

(ii) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b})$ är ett höger system.

(iii) $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\alpha$, där

$\alpha$ är vinkeln mellan $\bar{a}$ o $\bar{b}$.

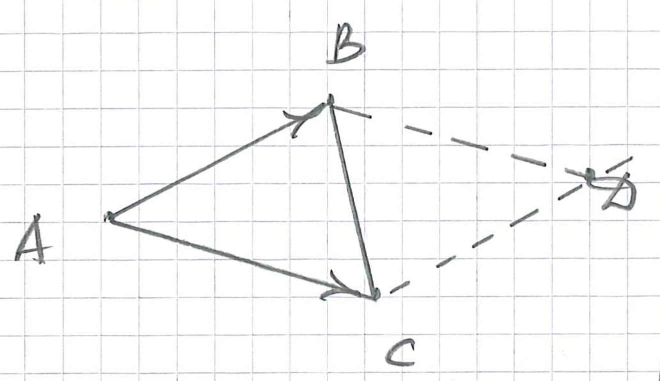
Obs $|\bar{a} \times \bar{b}|$ är arean av




- Om $\bar{a} \parallel \bar{b}$ så är $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$

Problem 1: $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(-1,0,2)$

tre punkter i rummet. Finn arean av $\triangle ABC$.




Obs

arean av $\triangle ABC =$

$\frac{1}{2} \cdot$ arean av $\square ABCD =$

$= \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$

$$\overline{AB} = (B) - (A) = (2,3,1) - (1,2,3) = (1,1,-2)$$

$$\overline{AC} = (C) - (A) = (-1,0,2) - (1,2,3) = (-2,-2,-1)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ -(-1-4) \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \underline{5 \cdot \sqrt{2}}$$

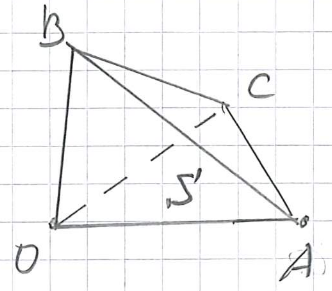
$\Rightarrow$ arean av $\triangle ABC = \underline{\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2}}$

Obs Kontroll av $\overline{AB} \times \overline{AC} \perp \overline{AB}, \overline{AC}$

Problem 2. $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(-1,0,2)$

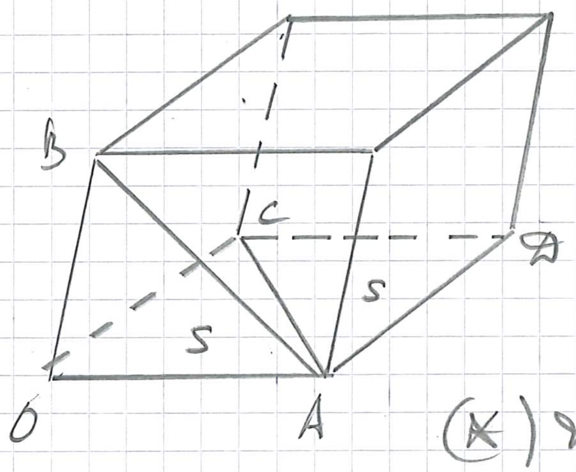
tre punkter i rummet.

Finn volymen $V_1$ av pyramiden $OABC$, där $O$ är origo.




Obs $V_1 = \frac{1}{3} h \cdot S$ $\quad (*)$

(höjden, basen)




$V_2 = h \cdot (2S)$ $\quad (**)$

(höjden, basen)

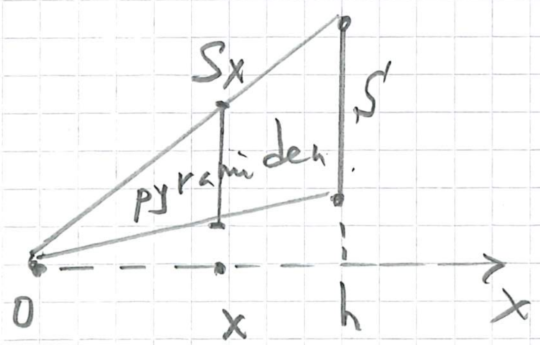
$(*)$ & $(**)$ $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{6} V_2$

Obs $V_2 = \left| (\overline{OA} \times \overline{OB}) \cdot \overline{OC} \right| = /\text{eller}/ =$

$= \left| (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AO} \right| = (-5,5,0) \cdot (-1,-2,-3) =$

$= |5-10+0| = |-5| = 5 \Rightarrow V_1 = \frac{5}{6}$

Analys:

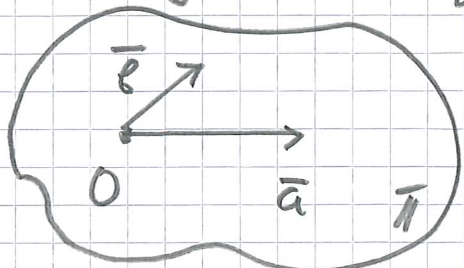



$$V = \int_0^h S_x \, dx = \int_0^h \frac{x^2 \cdot S}{h^2} \, dx$$

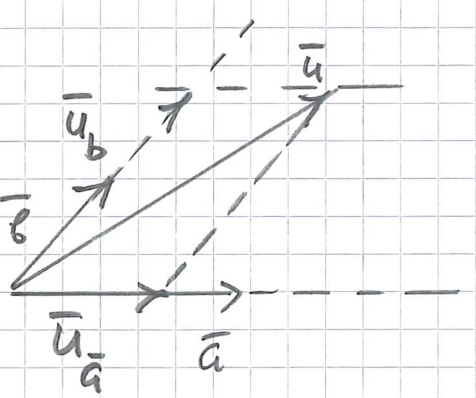
$$= \frac{1}{3} \cdot h \cdot S$$

Problem 3. $\bar{a}, \bar{b}$ nollskilda vektorer i rummet s.a. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

Avsätt $\bar{a}, \bar{b}$ från origo $\underline{O}$ betrakta planet




Visa att $\bar{a} \times \bar{b} \perp$ godtycklig nollskild vektor $\bar{u}$ i planet $\pi$.




Obs $\bar{u} = \bar{u}_{\bar{a}} + \bar{u}_{\bar{b}} = x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b}$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{u} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b}) =$$

$$= x \cdot \underbrace{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}}_{= 0} + y \cdot \underbrace{(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{b}}_{= 0} = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow (\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{u}$

$\Big($ Obs $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{u} = \underset{\neq 0}{|\bar{a} \times \bar{b}|} \cdot \underset{\neq 0}{|\bar{u}|} \cdot \underline{\underline{\cos\varphi}} \Big)$