Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kontrollskrivning för Linjär algebra (TATA16)
2008-11-08 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 10 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans med lösningar.

1. Låt $A(1,2)$, $B(3,4)$ vara punkter med koordinater i ett koordinatsystem. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $2:3$.

   Svar: $(\frac{9}{5}, \frac{14}{5})$

2. Låt $A(1,2)$, $B(3,4), C(1,-1)$ vara punkter med koordinater i ett ortonormerat koordinatsystem. Finn cos av vinkeln BCA.

   Svar: $\frac{5}{\sqrt{29}}$

3. Finn ortogonala projektionen av vektor $\overline{u} = (3,-1,1)$ på linjen L som har en riktningsvektor $\overline{v} = (1,1,2)$.

   Svar: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

4. Låt $A(0,0,0)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$ vara punkter med koordinater i ett ortonormerat koordinatsystem. Finn arean av parallellogramen som spänns av vektorerna $\overline{BA}$ och $\overline{BC}$.

   Svar: $6\sqrt{6}$

5. Vektorerna $\overline{u} = (1,2,9)$, $\overline{v} = (0,1,1)$, $\overline{w} = (2,4,0)$ är avsatta från origo. Ligger de i samma plan?

   Svar: Nej

6. Finn ekv på *parameterfri* form för den rätta linjen som går genom punkten $A(-1,2)$ och är parallell med vektorn $\overline{u} = (4,3)$.

   Svar: $3x - 4y + 11 = 0$

7. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(0,2,1)$, $B(3,4,5)$, $C(1,1,1)$.

   Svar: $4x + 4y - 5z - 3 = 0$

8. Finn avståndet från punkten $A(0,1,1)$ till planet $2x+3y-z=3$.

   Svar: $\frac{1}{\sqrt{14}}$

9. Finn längden av vektorn $\overline{u}=(2,-3,-2,5)$ i det euklidiska rummet R^4.

   Svar: $\sqrt{42}$

10. Finn skalärprodukten $\overline{u}\cdot\overline{v}$ om $|3\overline{u}+2\overline{v}|=5$ och $|\overline{u}|=1$, $|\overline{v}|=3$.

    Svar: $-\frac{5}{3}$

11. Betrakta följande funktioner på det linjera rummet R^2:

    (a) $(\overline{u},\overline{v})_1 = 5u_1v_1+2u_1v_2$;

    (b) $(\overline{u},\overline{v})_2 = 2u_1v_1+5u_2v_2$

    (c) $(\overline{u},\overline{v})_2 = u_1v_1-u_2v_2$.

    Vilken av dem är en skalärprodukt på R^2?

    Svar: (b)

12. Betrakta matriser

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

    Vilka av dem är övertriangulära?

    Svar: C

13. Beräkna den produkt av AB, BC, AC som har mening:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

    Svar: $AC=\begin{pmatrix} 13 & 3 & -6 \\ 17 & 17 & 11 \end{pmatrix}$

14. Låt E vara enhetsmatrisen av typ (3×3). Ange en lsg till ekv $X^2=E$ s. a. $X\neq E$.

    Svar: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. Låt $S : R^2 \to R^2$ vara speglingen i linjen $y = -x$.

    Finn avbildningsmatrisen.

    Svar: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

16. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (2, 5)$ under rotationen med 120 grader.

    Svar: $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 - 5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 5 \end{pmatrix}$

17. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen i x, y-planet som ges av proektionen på x-axeln följd av speglingen i y-axeln.

    Svar: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. Låt $AX = B$ vara ett linärt ekvssystem. Vilka lsgsmängder kan förekomma? Välja ett bland följande alternativ:

    (a) inga lsgar; precis en lsg; precis två lsgar.

    (b) inga lsgar; precis en lsg; oändligt många lsgar.

    (c) precis en lsg; precis två lsgar; oändligt många lsgar.

    Svar: (b)

19. Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

    Svar: $x_1 = -\frac{1}{3}t + \frac{8}{3}s - \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}, x_2 = t, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = p,\ t, s, p \in R$

20. För vilka reella tal k har följande ekvationssystem precis en lösning,

$$\begin{cases} x + ky = -8 \\ kx + 9y = 13. \end{cases}$$

    Svar: $k \neq -3, 3$