Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2009-11-09 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans med lösningar.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Avsätt vektorn $\overline{u} = (2, -1, 3)$ från punkten $A(-1, -5, 0)$. Finn koordinater för slutpunkten av den riktade sträckan.

   Svar: $(1, -6, 3)$

2. Låt $A(2, -1),\ B(-3, 5), C(1, 1)$ vara punkter. Finn cos av vinkeln CAB.

   Svar: $\frac{17}{\sqrt{61}\sqrt{5}}$

3. Finn den ortogonala projektionen av vektor $\overline{AB} = (3, -1, 1)$ på linjen L som går genom punkterna $A(2, -1, 0)$ och $C(1, 2, 1)$.

   Svar: $-\frac{5}{11}(-1, 3, 1)$

4. Låt $\overline{AB} = (-1, 3, 5)$ och $\overline{BC} = (2, 7, 1)$. Finn arean av triangeln ΔABC.

   Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{32^2 + 11^2 + 13^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1314}$

5. Ligger punkterna $A(1, 2, 10),\ B(0, 1, 2),\ C(2, 4, 1)$ och $D(0, 0, 1)$ i samma plan?

   Svar: Nej

6. Finn ekv på *parameterfri* form för den rätta linjen som går genom punkten $A(1, -2)$ och är parallell med vektorn $\overline{u} = (3, 5)$.

   Svar: $5x - 3y - 11 = 0$

7. Finn ekv på normalform för det plan som innehåller punkten $A(0, 2, 1)$ och linjen $L : x = 3 + 2t,\ y = 4 - 3t,\ z = 5 + t$.

   Svar: $14x + 5y - 13z + 3 = 0$

8. Finn avståndet från punkten $A(-2,3,1)$ till planet $x+3y-2z=5$.

   Svar: 0

9. Finn standardskalärprodukten av vektorerna $\overline{u}=(2,-3,-2,5,1)$ och $\overline{v}=(-1,2,3,0,4)$ i det euklidiska rummet R^5.

   Svar: -10

10. Finn cos av vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ om $|3\overline{u}-2\overline{v}|=5$ och $|\overline{u}|=1$, $|\overline{v}|=3$.

    Svar: $\frac{5}{9}$

11. Finn längden av vektorn $\overline{w}=(2,-3,-2)$ i rummet R^3 med skalärprodukten $(\overline{u},\overline{v})_1=2u_1v_1+3u_2v_2+5u_3v_3$.

    Svar: $\sqrt{55}$

12. Betrakta matriser

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

    Vilka av dem är symmetriska?

    Svar: B och D

13. Beräkna den produkt av $AB,\ BC,\ AC$ som har mening:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Svar: ingen

14. Låt O vara nollmatrisen av typ (2×2). Ange en lsg till ekv $X^3=O$ s. a. $X\neq O$.

    Svar: till exempel, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Låt $P:R^2\to R^2$ vara proektionen på linjen $y=x$.

    Finn avbildningsmatrisen.

    Svar: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

16. Finn bilden av vektor $\overline{u}=(3,2)$ under rotationen med 60 grader.

    Svar: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$

17. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen i x, y-planet som ges av proektionen på y-axeln följd av speglingen i x-axeln.

    Svar: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

18. Låt $AX = B$ vara ett överbestämt linjärt ekvssystem. Vilken minstakvadratlösningsmängd aldrig förekommer? Välja ett bland följande alternativ:

    (a) den tomma mängden.

    (b) en mängd bestående av ett element.

    (c) en mängd bestående av många element.

    Svar: (a)

19. Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

    Svar: $x_1 = -\frac{3}{2}p + 3r - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}, x_2 = p, x_3 = -2r, x_4 = r, x_5 = s$, där p, r, s är godtyckliga tal

20. För vilka reella tal k har följande ekvationssystem precis en lösning,

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + 16y = 8. \end{cases}$$

    Svar: för alla k utom -4 och 4