

KONTROLLSKRIVNING FÖR LINJÄR ALGEBRA  
2010-10-19 KL 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.

Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoses som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.

**Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans med lösningar.**

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Avsätt vektorn  $\bar{u} = (3, -1, 4)$  från punkten  $A(-1, -2, 4)$ . Finn koordinater för slutpunkten av den riktade sträckan.  
Svar: Slutpunkten har koordinater:  $(2, -3, 8)$
2. Låt  $A(1, -1)$ ,  $B(-3, 5)$ ,  $C(2, 1)$  vara punkter. Finn  $\cos$  av vinkeln  $ABC$ .  
Svar:  $\cos ABC = \frac{22}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}$
3. Vilka av linjerna  $L_1 : 2x + 3y = 5$ ,  $L_2 : x = -7 + 3t, y = 5 - 2t$  och  $L_3 : 3x - 2y - 1 = 0$  är parallella?  
Svar:  $L_1 \parallel L_2$
4. Finn den ortogonala projektionen av vektor  $\bar{u} = (3, -1)$  på linjen  $L : x + 2y = 3$ .  
Svar:  $\frac{7}{5} \cdot (2, -1)$
5. Betrakta punkterna  $A(1, 2, 10)$ ,  $B(0, 1, 2)$ ,  $C(2, 4, 1)$ . Finn arean av triangeln  $\triangle ABC$ .  
Svar:  $\frac{\sqrt{915}}{2}$
6. Finn ekv på *parameter* form för den rätta linje som går genom punkten  $A(1, -2)$  och är vinkelrätt mot vektorn  $\bar{u} = (3, 5)$ .  
Svar:  $x = 1 + 5t, y = -2 - 3t$
7. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna  $A(1, 3, 0)$ ,  $B(8, 1, 2)$ ,  $C(2, -2, 1)$ .  
Svar:  $8x - 5y - 33z + 7 = 0$

8. Finn avståndet från punkten  $A(-2, 3)$  till linjen  $x + 3y = -5$ .

Svar:  $\frac{12}{\sqrt{10}}$

9. Finn den standardskalärprodukt av  $\bar{u} \cdot \bar{v}$ ,  $\bar{v} \cdot \bar{w}$  eller  $\bar{u} \cdot \bar{w}$  som har mening, där  $\bar{u} = (3, 2, -2, 5, 4)$  och  $\bar{v} = (-1, 0, 3, 7)$  och  $\bar{w} = (1, 0, 10, 5, 4)$ .

Svar:  $\bar{u} \cdot \bar{w} = 24$

10. Finn längden av vektorn  $\bar{w} = (1, -3, -2, 4)$  i rummet  $R^4$  med skalärprodukten  $(\bar{u}, \bar{v})_1 = 10u_1v_1 + 3u_2v_2 + 5u_3v_3 + u_4v_4$ .

Svar:  $\sqrt{73}$

11. Betrakta följande delmängder till euklidiska rummet  $R^4$ :

(a)  $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$ ;

(b)  $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 1\}$ .

Vilken av dem är inget underrum till  $R^4$ ?

Svar:  $M_2$

12. Vilka av följande matriser är diagonalmatriser?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar:  $C$

13. Beräkna den produkt av  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  som har mening:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svar:  $BC = \begin{pmatrix} 24 & 21 \end{pmatrix}$

14. Låt  $E$  vara enhetsmatrisen av typ  $(3 \times 3)$ . Ange fem lösningar till ekv  $X^2 = E$ .

Svar:  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$   
 $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. Betrakta den linjära avbildning  $f : R^n \rightarrow R^m$  som ges av

$$\begin{aligned}y_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\y_2 &= -x_1 + x_2 \\y_3 &= x_1 + 7x_2.\end{aligned}$$

Ange  $n$  och  $m$ , och finn avbildningsmatrisen.

Svar:  $n = 2, m = 3$  och  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

16. Finn bilden av vektor  $\bar{u} = (1, 4)$  under rotationen med  $-30$  grader i origo.

Svar:  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \\ -\frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

17. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen i  $x, y$ -planet som ges av projektionen på  $x$ -axeln följt av projektionen på  $y$ -axeln.

Svar:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. Låt  $AX = B$  vara ett homogent linjärt ekvssystem. Vilken lösningsmängd aldrig förekommer? Välj ett bland följande alternativ:

- (a) den tomma mängden.
- (b) en mängd bestående av ett element.
- (c) en mängd bestående av många element.

Svar: (a)

19. Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$\begin{cases} 2x_2 - 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_5 = 1. \end{cases}$$

Svar:  $x_1 = 4t - 4s + 2p - 1, x_2 = 2s - \frac{1}{2}p + 1, x_3 = t, x_4 = s, x_5 = p$

20. För vilka reella tal  $k$  har följande ekvationssystem ingen lösning alls,

$$\begin{cases} kx + 25y = 10 \\ x + ky = 2. \end{cases}$$

Svar:  $k = -5$