Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2013-10-28 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Låt vektorn $\overline{AB}$ ha koordinater $(-1, 4, 5)$ och punkten B ha koordinater $(0, 2, 4)$. Finn koordinater för punkten A.

   Svar: $A = B - \overline{AB} = (1, -2, -1)$

2. Låt $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 1)$ vara punkter i rummet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $2 : 1$.

   Svar: $M = A + \frac{2}{3}\overline{AB} = (\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3. Låt $A(1, 2)$, $B(3, 4), C(1, -1)$ vara punkter i planet. Finn cos av vinkeln CAB.

   Svar: $\cos(A) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Finn den ortogonala projektionen av vektor $\overline{u} = (3, -1)$ på linjen $L : 4x - 5y + 1 = 0$.

   Svar: Obs $\overline{v}(5, 4)||L$. Så är $\mathrm{pr}_L\overline{u} = \mathrm{pr}_{\overline{v}}\overline{u} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2} \cdot \overline{v} = \frac{11}{41}(5, 4)$.

5. Betrakta punkterna $A(1, 2, 10)$, $B(0, 1, 2)$, $C(2, 4, 1)$ i rummet. Finn arean av triangeln ΔABC.

   Svar: arean av $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{915}$.

6. Vilka av ekvationer beskriver samma linje i planet

$$L_1 : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 8 - 2t \end{cases}, \; L_2 : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \; L_3 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}.$$

   Svar: Obs $L_1 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-8}{-2}$, $L_2 : \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2}$, $L_3 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-7}{1}$ eller $L_1 : -2x - 4y - 30 = 0, L_2 : 2x - 4y + 8 = 0, L_3 : x + 2y - 15 = 0$. $=> L_1 = L_3$.

7. Finn ekv på *parameter* form för den räta linje som går genom punkterna $A(2,3,1)$ och $B(-2,5,4)$.

   Svar: Obs $\overline{AB}(-4,2,3)||L$. Så är $L: x = 2-4t, y = 3+2t, z = 1+3t, t \in R$.

8. Finn en enhetsvektor som är vinkelrät mot planet $3x + y - 2z - 5 = 0$.

   Svar: $\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (3,1,-2)$ eller $-\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (3,1,-2)$.

9. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(1,3,0)$,$B(2,4,-1)$, $C(3,10,5)$.

   Svar: Obs $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (12,-7,5)$ och $\overline{n}$ är vinkelrät till planet. Så är planets ekv: $12x - 7y + 5z + 9 = 0$

10. Finn avståndet från punkten $A(-1,4,2)$ till planet $x + 3y - 2z = -5$.

    Svar: $d = \frac{|Am+Bn+Cp+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}}$.

11. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{v} \cdot \overline{w}$ eller $\overline{u} \cdot \overline{w}$ som har mening, där $\overline{u} = (5,2,-2,5)$ och $\overline{v} = (-1,4,3,7,1)$ och $\overline{w} = (1,-1,0,5,7)$.

    Svar: $\overline{v} \cdot \overline{w} = 37$.

12. Betrakta vektorrumet V som består av realvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ med addition: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, och multiplikation:. $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ definierade för varje $x \in [0,1]$. Vilka av följande delmängder till V är underrum till V:

    $M_0 = \{f \in V : f(0) = 0\}, M_{\frac{1}{2}} = \{f \in V : f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\}$ och $M_1 = \{f \in V : f(1) = 1\}$?

    Svar: M_0 ty

    1) Om $f(0) = 0$ och $g(0) = 0$ så är $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0$ och $(k \cdot f)(0) = k \cdot f(0) = 0 => M_0$ är ett underrum till V.

    2) Om $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ så är $(2 \cdot f)(\frac{1}{2}) = 2 \cdot f(\frac{1}{2}) = 1 \neq \frac{1}{2} => M_{\frac{1}{2}}$ är inget underrum till V.

13. Forse vektorrummet V från förra uppgiften med skalärprodukten $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Finn längden av funktionen $f(x) = x^2 + 1$.

    Svar: $|f| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_0^1 (x^2+1)^2 dx} = 2 \cdot \sqrt{\frac{7}{15}}$.

14. Finn cos av vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ om $|3\overline{u} - 2\overline{v}| = 4$ och $|\overline{u}| = 1$, $|\overline{v}| = 3$.

    Svar: Obs $(3\overline{u} - 2\overline{v}) \cdot (3\overline{u} - 2\overline{v}) = 16$. Så är $\overline{u} \cdot \overline{v} = \frac{29}{12}$ och $\cos(\phi) = \frac{29}{36}$.

15. Vilka av följande matriser är symmetriska?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Svar: C och D.

16. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Beräkna de produkter av AB, AC, CA som har mening.

Svar: $C \cdot A = \begin{pmatrix} 40 & 14 & 52 \\ 15 & 24 & 27 \end{pmatrix}$

17. Låt O (resp. E) vara nollmatrisen (resp. enhetsmatrisen) av typ (2×2). Ange en real lsg till ekv $X^2 + E = O$.

Svar: till ex. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ men det finns fler.

18. Betrakta den linjära avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_4 \\ y_2 &= -x_2 + x_3 + 5x_4 \\ y_3 &= -2x_1 + 5x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen.

Svar: $n = 4, m = 3$ och $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (3, -5)$ under rotationen med 45 grader i origo.

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

20. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen i x, y-planet som ges av projektionen på x-axeln följd av speglingen i linjen $y = -x$.

Svar: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$