Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2014-10-27 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Avsätt vektorn $\overline{u} = (3, 2, -1)$ från punkten $A(-1, -5, 2)$. Finn koordinater för slutpunkten B av den riktade sträckan $\overline{AB}$.

   Svar: $B(2, -3, 1)$

2. Låt $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 1)$ vara punkter i rummet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $1 : 3$.

   Svar: $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4})$

3. Låt $A(3, 4)$, $B(1, 2), C(1, -1)$ vara punkter i planet. Finn sin av vinkeln CAB.

   Svar: $\sin CAB = \frac{3}{\sqrt{58}}$

4. Finn den ortogonala projektionen av vektor $\overline{u} = (2, -3)$ på linjen L : $4x - 2y + 5 = 0$.

   Svar: $\text{proj}_L \overline{u} = -\frac{4}{5}(1, 2)$

5. Finn arean av en parallellogram som har hörn i punkterna $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 10)$, $C(2, 4, 1)$ och en okänd punkt.

   Svar; $A = \sqrt{915}$

6. Vilka av punkterna $P(1, 7), Q(-2, 1), R(-7, 13)$ ligger på linjen

$$L : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases} \quad ?$$

   Svar: $P(1, 7)$

7. Finn ekv på *parameter* form för den räta linje som går genom punkterna $A(-1,3,4)$ och $B(2,5,0)$.

   Svar: til ex. $x=-1+3t, y=3+2t, z=4-4t, t\in R$

8. Finn en enhetsvektor som är vinkelrät mot planet $2x+7y-3z-5=0$.

   Svar: $\frac{1}{\sqrt{62}}(2,7,-3)$ eller $-\frac{1}{\sqrt{62}}(2,7,-3)$

9. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(2,1,0)$,$B(3,2,-1)$, $C(8,1,-7)$.

   Svar: $7x-y+6z-13=0$

10. Finn avståndet från punkten $A(-2,3,2)$ till planet $x-3y+2z=1$.

    Svar: $d=\frac{8}{\sqrt{14}}$

11. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u}\cdot\overline{v}$, $\overline{v}\cdot\overline{w}$ eller $\overline{u}\cdot\overline{w}$ som har mening, där $\overline{u}=(5,2,-2,5)$ och $\overline{v}=(-1,4,3,7,1)$ och $\overline{w}=(1,-1,0,5,7)$.

    Svar: $\overline{v}\cdot\overline{w}=37$

12. Betrakta vektorrumet V som består av realvärda deriverbara funktioner på tallinjen R med addition: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, och multiplikation:. $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$ definierade för varje $x\in R$. Vilka av följande delmängder till V är underrum till V:

    $M_1=\{f\in V: f(1)=0\}, M_{\frac{1}{2}}=\{f\in V: f(\frac{1}{2})=0\}$ och $M_0=\{f\in V: f(0)=0\}$?

    Svar: $M_1, M_{\frac{1}{2}}, M_0$ är underrum till V

13. Forse vektorrummet R^4 med skalärprodukten $(\overline{x},\overline{y})=2x_1y_1+3x_2y_2+4x_3y_3+x_4y_4$. Finn längden av vektorn $\overline{a}=(3,-1,2,4)$.

    Svar: $|\overline{a}|=\sqrt{53}$

14. Finn cos av vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ om $|3\overline{u}+\overline{v}|=4$ och $|\overline{u}|=2$, $|\overline{v}|=3$.

    Svar: $\cos\alpha=-\frac{29}{36}$

15. Vilka av följande matriser är symmetriska?

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

    Svar: Bara D är symmetrisk.

16. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Beräkna den produkt av AB, BA som har mening.

Svar: $AB = \begin{pmatrix} 35 & -1 \\ 11 & 15 \\ -5 & -11 \end{pmatrix}$

17. Låt O vara nollmatrisen av typ (2×2). Ange oändligt många olika (2×2)-matriser X som uppfyller ekv $X^2 = O$.

Svar: till ex. $A_n = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, n \in Z$

18. Betrakta den linjära avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - 4x_2 + 5x_4 \\ y_2 &= 2x_2 - x_3 + 5x_4 \\ y_3 &= 7x_1 + 5x_3 + x_4 \\ y_4 &= -2x_1 + 9x_2 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen.

Svar: $n = m = 4$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

19. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (4, 2)$ under rotationen 30 grader i origo.

Svar: $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$ är bilden av $\overline{u}$

20. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen i x, y-planet som ges av projektionen på y-axeln följd av speglingen i linjen $y = x$.

Svar: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$