Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2016-10-24 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Vektorn $\overline{AB}$ har koordinater $(2, 1, -3)$ och punkten A har koordinater $(5, -2, 1)$. Finn koordinater för punkten B.

   Svar: Obs $\overline{AB} = (B) - (A)$. Så är $(B) = (A) + \overline{AB} = (5, -2, 1) + (2, 1, -3) = (7, -1, -2)$.

2. Låt $A(-1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$ vara punkter i rummet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $2 : 1$.

   Svar: Obs $(M) = \frac{1}{3}(A) + \frac{2}{3}(B) = \frac{1}{3}((A) + 2(B)) = \frac{1}{3}((-1, 2, 3) + 2(3, 1, 2)) = \frac{1}{3}(5, 4, 7) = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

3. Låt $A(3, 1)$, $B(1, 2), C(1, -1)$ vara punkter i planet. Finn cosinus av vinkeln CBA.

   Svar: Obs $\overline{BC} = (C) - (B) = (1, -1) - (1, 2) = (0, -3)$, $\overline{BA} = (A) - (B) = (3, 1) - (1, 2) = (2, -1)$ och $\cos\beta = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}{|\overline{BC}|\cdot|\overline{BA}|} = \frac{(0,-3)\cdot(2,-1)}{3\cdot\sqrt{5}} = \frac{3}{3\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. Finn den ortogonala projektionen av vektorn $\overline{u} = (-1, 2)$ på linjen $L : 2x + 5y = 6$.

   Svar: Obs $\overline{n}(2, 5) \perp L$, så är $\overline{v}(-5, 2)||L$. Dessutom, $\text{proj}_L\overline{u} = (\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2})\cdot\overline{v} = (\frac{(-1,2)\cdot(-5,2)}{(-5)^2+2^2})\cdot(-5, 2) = (\frac{9}{29})\cdot(-5, 2)$

5. Finn arean av en triangel som har hörn i punkterna $A(2, -1, 3)$, $B(0, 2, 7)$, $C(1, 5, 2)$.

   Svar: Obs arean av triangeln $= \frac{1}{2}\cdot$ arean av parallellogram som späns upp av vektorerna $\overline{AB}$ och $\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\cdot|(-2, 3, 4)\times(-1, 6, -1)| = \frac{1}{2}\cdot|(-27, -6, -9)| = \frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{9^2 + 2^2 + 3^2}) = \frac{3\sqrt{94}}{2}$

6. Vilka av ekvationer beskriver samma linje i planet

$$L_1 : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 8 - 2t \end{cases}, \; L_2 : 2x + 4y - 30 = 0, \text{Ł}_3 : 4x - 2y = 1.$$

Svar: Obs $\overline{v_1}(4,-2)||L_1$, $\overline{v_2}(-4,2)||L_2$ och $\overline{v_3}(2,4)||L_3$. Så är $L_1||L_2$ men ej L_3. Dessutom punkten $P_1(-1,8)$ hör till både linjerna L_1, L_2. Vi får $L_1 = L_2$.

7. Finn ekv på *normal* form för den räta linje som går genom punkterna $A(3,4)$ och $B(2,5)$.

Svar: Obs $\overline{AB} = (B) - (A) = (2,5) - (3,4) = (-1,1)$. Så är $\overline{n}(1,1) \perp$ linjen.Linjens ekv är $1 \cdot x + 1 \cdot y + C = 0$. Insättning av en av punkterna ger $C = -7$. Vi får ekv $x + y - 7 = 0$.

8. Finn alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot linjen $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$.

Svar: Obs $\overline{v}(3,-2)||$ linjen. Så är $\overline{n}(2,3) \perp$ linjen. Normera denna $(\frac{1}{|\overline{n}|} \cdot \overline{n} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2,3))$ och sätt in $\pm$ framför den nya vektorn. Vi får $\pm\frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2,3)$

9. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(2,3,0)$,$B(1,2,-1)$ och $C(4,1,-7)$.

Svar: Obs $\overline{AB} = (1,2,-1) - (2,3,0) = (-1,-1,-1)$, $\overline{AC} = (4,1,-7) - (2,3,0) = (2,-2,-7)$ och $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (-1,-1,-1) \times (2,-2,-7) = (5,-9,4) \perp$ planet. Så är planets ekv $5x - 9y + 4z + D = 0$. Sätt in en av punkterna i ekv. Vi får $D = 17$ och ekv $5x - 9y + 4z + 17 = 0$

10. Finn avståndet från punkten $A(1,3)$ till linjen $x - 5y = 3$.

Svar: avståndet är $\frac{|1-5\cdot 3-3|}{\sqrt{1+25}} = \frac{17}{\sqrt{26}}$

11. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{v} \cdot \overline{w}$ eller $\overline{u} \cdot \overline{w}$ som har mening, där $\overline{u} = (8,-2,7)$ och $\overline{v} = (-4,5,7,6)$ och $\overline{w} = (-1,3,7,3)$.

Svar: $\overline{v} \cdot \overline{w} = 4 + 15 + 49 + 18 = 86$

12. Betrakta vektorrumet V, som består av realvärda deriverbara funktioner på sträckan $[0,1]$, med addition: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, och multiplikation: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ definierade för varje $x \in [0,1]$. Forse sedan vektorrummet V med skalärprodukten: $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Vad är längden av funktionen $f(x) = 1 + 3x^2$?

Svar: Obs $|f| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\int_0^1 f(x)f(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 (1+3x^2)^2 dx} = \sqrt{4.8}$

13. Betrakta följande delmängder till rummet V från uppgiften 12:

    $M_0 = \{f : f(0) = 0\}$ och $M_1 = \{f : f(1) = 1\}$.

    Vilket av dem är ett underrum till V?

    Svar: M_0.

14. Finn skalärprodukten $\overline{u} \cdot \overline{v}$ om $|2\overline{u} - \overline{v}| = 8$ och $|\overline{u}| = 6$, $|\overline{v}| = 5$.

    Svar: Obs $(2\overline{u} - \overline{v}^2 = 64)$ eller $4 \cdot |\overline{u}|^2 - 4\overline{u} \cdot \overline{v} + |\overline{v}|^2 = 64$. Så är $\overline{u} \cdot \overline{v} = \frac{4 \cdot 36 + 25 - 64}{4} = \frac{105}{4}$.

15. Låt $A^2 = A$. Förenkla $U = (A^2 + 2A + E)(A^3 - 3E)$, där E är en enhetsmatris.

    Svar: Obs $U = (A^2+2A+E)(A^3-3E) = A^5-3A^2+2A^4-6A+A^3-3E = A - 3A + 2A - 6A + A - 3E = -5A - 3E$

16. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix})$$

    Beräkna den produkt av AB, BC, AC som har mening.

    Svar: Obs bara BC har mening. Notera att $BC =$

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 48 \\ -3 & 33 & 9 \end{pmatrix}$$

17. Låt O (resp. E) vara nollmatrisen (resp. enhetsmatrisen) av typ (2×2). Ange en real lösning till ekvationen $X^6 + E = O$.

    Svar: till ex. Obs $X^6+E = (X^2+E)\cdot(X^4-X^2+E)$. Finn en real lsg till ekv $X^2+E = O$ eller $X^2 = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) & -\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) \\ \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) & \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2.$$

    Vi får en möjlig lsg $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Betrakta den linjära avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 4x_3 \\ y_2 &= 2x_1 - 5x_4 + x_5 \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen.

Svar: $n = 5, m = 2$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

19. Finn bilden av vektorn $\overline{u} = (2, 1)$ under rotationen 30 grader i origo.

Svar: Bilden av vektorn $\overline{u} = (2, 1)$ är $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$

20. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vara avbildningsmatrisen för en avbildning f i x, y-planet. Vad är f för en avbildning? Välj en av följande alternativ:

(a) f är en ortogonal proektion på x-axeln;

(b) f är en spegling i y-axeln;

(c) f är en rotation i origo vinkeln π.

Svar: Obs $A \cdot \overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$.

Det här är en spegling i x-axeln. Varken $(a), (b)$ eller (c).