Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2017-10-23 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Vektorn $\overline{AB}$ har koordinater $(2,-1,3)$ och punkten B har koordinater $(4,-3,2)$. Finn koordinater för punkten A.

   Svar: Obs $\overline{AB} = B - A$. Så är $A = B - \overline{AB} = (4,-3,2) - (2,-1,3) = (2,-2,-1)$.

2. Låt $A(1,2,5)$, $B(3,-4,2)$ vara punkter i rummet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $1:3$.

   Svar: $M = \frac{3}{4} \cdot A + \frac{1}{4} \cdot B = \frac{3}{4} \cdot (1,2,5) + \frac{1}{4} \cdot (3,-4,2) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{17}{4})$.

3. Låt $A(2,1)$, $B(3,2), C(1,-1)$ vara punkter i planet. Finn cosinus av vinkeln ABC.

   Svar: Obs $\overline{BA} = A - B = (2,1) - (3,2) = (-1,-1)$, $|\overline{BA}| = \sqrt{2}$, $\overline{BC} = C - B = (1,-1) - (3,2) = (-2,-3)$, $|\overline{BC}| = \sqrt{13}$, $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-1,-1) \cdot (-2,-3) = 5$. Så är $= \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

4. Finn den ortogonala projektionen av vektorn $\overline{u} = (-1,2)$ på linjen L : $2x + 5y = 6$.

   Svar: Obs en riktningsvektor till linjen är $\overline{v} = (5,-2)$. Så är den ortogonala projektionen $\frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \cdot \overline{v} = \frac{-9}{29} \cdot (5,-2)$.

5. Finn arean av en parallellogram som har hörn i punkterna $A(2,-1,3)$, $B(0,2,7)$, $C(1,5,2)$ och i en okänd punkt.

   Svar: Obs arean är $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = |(-2,3,4) \times (-1,6,-1)| = |(-27,-6,-9)| = 3 \cdot \sqrt{94}$.

6. Vilka av ekvationer beskriver samma linje i planet

$$L_1 : 3x + 2y - 1 = 0,\ L_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases},\ L_3 : 2x - 3y = 1.$$

Svar: riktningsvektorer till linjerna: $\overline{v}_1 = (2, -3), \overline{v}_2 = (2, -3), \overline{v}_3 = (3, 2)$. Så är $L_1 || L_2$. Vi har två kandidater: L_1, L_2. Obs punkten $P(-1, 2)$ hör till linjen L_2. Kolla om P hör till L_1: $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 1$. O.K. Vi får att $L_1 = L_2 \neq L_3$.

7. Finn ekv på *parameter* form för den räta linje som går genom punkterna $A(1, 3, 4)$ och $B(-3, 2, 6)$.

Svar: En riktningsvektor till linjen är $\overline{AB} = (-4, -1, 2)$. Så är linjensekv: $\begin{cases} x = 1 - 4t, \\ y = 3 - t,\ t \in R. \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$

8. Finn alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot planet $3x + 2y - 6z = 5$.

Svar: $\pm\frac{1}{7} \cdot (3, 2, -6)$.

9. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(7, 3, 1)$,$B(2, -3, -4)$ och $C(4, 1, -2)$.

Svar: En normal till planet är $\overline{AB} \times \overline{AC} = (-5, -6, -5) \times (-3, -2, -3) = (5, 6, 5) \times (3, 2, 3) = (8, 0, -8)$ eller $(1, 0, -1)$. Planetsekv är $x - z + D = 0$. Finn D genom att sätta in A i ekvationen: $7 - 1 + D = 0$. Så är $D = -6$ och planetsekv: $x - z - 6 = 0$.

10. Finn avståndet från punkten $A(1, 3)$ till sin spegelbild i linjen $2x - 4y = 3$.

Svar: avståndet från punkten till linjen är $\frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 - 3}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{13}{\sqrt{20}}$. Så är avståndet från punkten $A(1, 3)$ till sin spegelbild i linjen $2x - 4y = 3$ $2 \cdot \frac{13}{\sqrt{20}}$ eller $\frac{13}{\sqrt{5}}$.

11. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{v} \cdot \overline{w}$ eller $\overline{u} \cdot \overline{w}$ som har mening, där $\overline{u} = (8, -2, 7, 3)$, $\overline{v} = (3, 2, 7, 6, 4)$ och $\overline{w} = (-1, 5, 6, -8)$.

Svar: $\overline{u} \cdot \overline{w} = (8, -2, 7, 3) \cdot (-1, 5, 6, -8) = -8 - 10 + 42 - 24 = 0$.

12. Betrakta vektorrumet V, som består av realvärda kontinuerliga funktioner på sträckan $[0, 1]$, med addition: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, och multiplikation: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ definierade för varje $x \in [0, 1]$.

Forse sedan vektorrummet V med skalärprodukten: $f \cdot g = 2 \cdot \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Vad är längden av funktionen $f(x) = 2 - 5x^2$?

Svar: Längden av f är $\sqrt{f \cdot f}$. Beräkna $f \cdot f = 2 \cdot \int_0^1 f(x)f(x)dx = 2 \cdot \int_0^1 (2-5x^2)^2 dx = 2 \cdot \int_0^1 (4 - 20x^2 + 25x^4)dx = \frac{14}{3}$. Så är $|f| = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

13. Betrakta följande delmängder till rummet V från uppgift 12:

    $M_{-1} = \{f : f(-1) = -1\}$, $M_0 = \{f : f(0) = 0\}$ och $M_1 = \{f : f(1) = 1\}$.

    Vilken (eller vilka) av dem är ett underrum till V?

    Svar: M_0.

14. Finn skalärprodukten $\overline{u} \cdot \overline{v}$ om $|3\overline{u} - 2\overline{v}| = 7$ och $|\overline{u}| = 5$, $|\overline{v}| = 4$.

    Svar: Obs $7^2 = |3\overline{u} - 2\overline{v}|^2 = (3\overline{u} - 2\overline{v}) \cdot (3\overline{u} - 2\overline{v}) = 9 \cdot |\overline{u}|^2 - 12 \cdot (\overline{u} \cdot \overline{v}) + 4 \cdot |\overline{v}|^2 = 9 \cdot 5^2 - 12 \cdot (\overline{u} \cdot \overline{v}) + 4 \cdot 4^2$. S å är $\overline{u} \cdot \overline{v} = \frac{240}{12} = 20$.

15. Låt $A^3 = E$. Förenkla $U = (A^2 + 2A + E)(A^2 - A + 3E)$, där E är en enhetsmatris.

    Svar: $U = A^4 - A^3 + 3A^2 + 2A^3 - 2A^2 + 6A + A^2 - A + 3E = A - E + 3A^2 + 2E - 2A^2 + 6A + A^2 - A + 3E = 2A^2 + 6A + 4E$.

16. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & -8 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

    Beräkna den produkt av AB, AC, BC som har mening.

    Svar: $BC = \begin{pmatrix} 35 & -36 & 58 \\ 63 & 9 & -27 \end{pmatrix}$

17. Låt O (resp. E) vara nollmatrisen (resp. enhetsmatrisen) av typ (2×2). Ange minst en real lösning till ekvationen $X^5 + X^3 + X^2 + E = O$.

    Svar: Ekvationen kan skrivas om: $(X^2 + E) \cdot (X^3 + E) = O$. En real lösning till ekv $X^2 + E = O$ eller ekv $X^2 + E = O$ fungerar. Till ex. $X^2 + E = O$ eller $X^2 = -E = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$. Så är $X_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ (sammansättningsregeln och geometri) eller $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Analogt, $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ för andra ekv.

18. Betrakta den linjära avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 4x_3 \\ y_2 &= 2x_2 - 5x_3 + x_4 \\ y_3 &= -3x_3 + 5x_4 + x_5 \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen.

Svar: $n = 5, m = 3$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

19. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (4, 1)$ under rotationen 45 grader i origo.

Svar: bilden är $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

20. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vara avbildningsmatrisen för en linjär avbildning f i x, y-planet. Vad är f för en avbildning? Välj en av följande alternativ:

(a) f är en ortogonal proektion på y-axeln;

(b) f är en spegling i x-axeln;

(c) f är en rotation i origo vinkeln $\frac{\pi}{2}$.

Svar: (b) ty för speglingen i x-axeln har vi $f(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 = 1 \cdot \overline{e}_1 + 0 \cdot \overline{e}_2$ och $f(\overline{e}_2) = -\overline{e}_2 = 0 \cdot \overline{e}_1 + (-1) \cdot \overline{e}_2$.