Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2018-10-26 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Vektorn $\overline{AB}$ har koordinater $(3,-1,2)$ och punkten A har koordinater $(5,-3,2)$. Finn koordinater för punkten B.

   Svar: Obs $\overline{AB} = (B) - (A)$. Så är $(B) = \overline{AB} + (A) = (3,-1,2) + (5,-3,2) = (8,-4,4)$.

2. Låt $A(2,5)$, $B(-4,2)$ vara punkter i planet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $2:3$.

   Svar: Repetera att $(M) = \frac{3}{5}(A)+\frac{2}{5}(B) = \frac{3}{5}(2,5)+\frac{2}{5}(-4,2) = \frac{1}{5}((6,15)+(-8,4)) = \frac{1}{5}(-2,19)$.

3. Låt $A(1,2,1)$, $B(2,3,2), C(-1,1,-1)$ vara punkter i rummet. Finn cosinus av vinkeln BCA.

   Svar: Obs $\cos(BCA) = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|}$. Räkna $\overline{CB} = (2,3,2)-(-1,1,-1) = (3,2,3)$, $\overline{CA} = (1,2,1)-(-1,1,-1) = (2,1,2)$, $\overline{CB}\cdot\overline{CA} = (3,2,3)\cdot(2,1,2) = 6+2+6 = 14$, $|\overline{CB}| = \sqrt{3^2+2^2+3^2} = \sqrt{22}$, $|\overline{CA}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$. Så är $\cos(BCA) = \frac{14}{3\sqrt{22}}$.

4. Finn den ortogonala projektionen av vektorn $\overline{u} = (-1,2,1)$ på linjen $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

   Svar: Obs att en riktningsvektor för L är vektorn $\overline{v} = (1,2,3)$. Så är ortogonala projektionen $\mathrm{pr}_L\overline{u} = \mathrm{pr}_{\overline{v}}\overline{u} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v} = \frac{(-1,2,1)\cdot(1,2,3)}{1^2+2^2+3^2}(1,2,3) = \frac{-1+4+3}{1+4+9}(1,2,3) = \frac{6}{14}(1,2,3) = \frac{3}{7}(1,2,3)$.

5. Finn arean av en parallellogram som har hörn i punkterna $A(1,5,2)$, $B(2,-1,3)$, $C(0,2,7)$, och i en okänd punkt.

Svar: Obs arean är $|\overline{BA} \times \overline{BC}|$. Räkna $\overline{BA} \times \overline{BC} = (-1, 6, -1) \times (-2, 3, 4) = (24 + 3, -(-4 - 2), -3 + 12) = (27, 6, 9) = 3 \cdot (9, 2, 3)$. Så är arean leka med $|3 \cdot (9, 2, 3)| = 3\sqrt{81 + 4 + 9} = 3\sqrt{94}$.

6. Finn ekv på *parameter* form för den räta linje som går genom punkterna $A(1, 4)$ och $B(-3, 2)$.

   Svar: Obs en riktningsvektor för linjen är vektorn $\overline{AB} = (-4, -2)$. En annan riktningsvektor är vektorn $(2, 1)$. Så är linjens ekv på parameterform: $x = 1 + 2t, y = 4 + t, t \in R$.

7. Vilka av ekvationer beskriver vinkelräta linjer i planet

$$L_1 : 3x - 2y = 1,\ L_2 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases},\ L_3 : 3x + 2y - 1 = 0.$$

   Svar: Obs $L_1 \perp \overline{n}_1(3, -2),\ L_2 || \overline{v}_2(3, 2),\ L_3 \perp \overline{n}_3(3, 2)$. Så är $L_2 \perp L_3$.

8. Finn alla enhetsvektorer som är parallella med linjen $x + 2y = 4$.

   Svar: Obs att en riktningsvektor för linjen är vektorn $\overline{v} = (2, -1)$ med längd $\sqrt{5}$. Så är vektorerna $\overline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ och $\overline{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ de enda enhetsvektorer som är parallella med linjen.

9. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(2, -3, -4)$, $B(4, 1, -2)$ och $C(7, 3, 1)$.

   Svar: Obs en normalvektor till planet är vektorn $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (2, 4, 2) \times (5, 6, 5) = (8, 0, -8)$. Så är ekv på normalform för planet $x - z + D = 0$. Sätt in A i ekv och få fram konstanten D: $2 + 4 + D = 0$ eller $D = -6$. Ekv på normalform för planet: $x - z - 6 = 0$.

10. Finn avståndet från punkten $A(1, 2, 3)$ till sin spegelbild i planet

    $2x - 4y + z = 1$.

    Svar: Finn avståndet d från punkten A till planet enligt formeln: $\frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 8 + 3 - 1|}{\sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$. Så är avståndet från punkten $A(1, 2, 3)$ till sin spegelbild i planet lika med $2d = \frac{8}{\sqrt{21}}$.

11. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{v} \cdot \overline{w}$ eller $\overline{u} \cdot \overline{w}$ som har mening, där $\overline{u} = (8, -2, 7, 3, 5)$, $\overline{v} = (3, 2, 7, 6)$ och $\overline{w} = (-1, 5, 6, -8)$.

    Svar: Obs att $\overline{u} \in R^5$ och $\overline{v}, \overline{w} \in R^4$. Så har bara $\overline{v} \cdot \overline{w}$ mening. Räkna: $\overline{v} \cdot \overline{w} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot (-8) = -3 + 10 + 42 - 48 = 1$.

12. Betrakta vektorrumet V, som består av realvärda kontinuerliga funktioner på sträckan $[0,1]$, med addition: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, och multiplikation: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ definierade för varje $x \in [0,1]$.

    Forse sedan vektorrummet V med skalärprodukten: $f \cdot g = 5 \cdot \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Vad är längden av funktionen $f(x) = 5 - 2x^2$?

    Svar: Repetera att $|f| = \sqrt{f \cdot f}$. Räkna: $f \cdot f = 5 \cdot \int_0^1 f(x)^2 dx = 5 \cdot \int_0^1 (5-2x^2)^2 dx = 5 \cdot \int_0^1 (25 - 20x^2 + 4x^4)dx = 5(25x - 20\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^5}{5})|_0^1 = 5(25 - \frac{20}{3} + \frac{4}{5}) = \frac{287}{3}$. Så är $|f| = \sqrt{\frac{287}{3}}$.

13. Betrakta följande delmängder till rummet V från uppgift 12:

    $M_0 = \{f : f(0) = -1\}$, $M_1 = \{f : f(1) = 0\}$ och $M_2 = \{f : f(2) = 1\}$.

    Vilken (eller vilka) av dem är ett underrum till V?

    Svar: M_1 är ett enda underrum till V ty om $f, g \in M_1$ och $k \in R$ så är även $f + g \in M_1$: $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$, och $k \cdot f \in M_1$: $(k \cdot f)(1) = k \cdot f(1) = k \cdot 0 = 0$.

    Notera att om $f, g \in M_0$ så är $f + g \notin M_0$ och $M_2 = \emptyset$.

14. Finn skalärprodukten $\overline{u} \cdot \overline{v}$ om $|3\overline{u} + 2\overline{v}| = 5$ och $|\overline{u}| = 1$, $|\overline{v}| = 3$.

    Svar: Obs $|3\overline{u}+2\overline{v}|^2 = 5^2$ och $VL = 9|\overline{u}|^2 + 12\overline{u}\cdot\overline{v} + 4|\overline{v}|^2 = 9 + 12\overline{u}\cdot\overline{v} + 36$. Så är $9 + 12\overline{u} \cdot \overline{v} + 36 = 25$ eller $\overline{u} \cdot \overline{v} = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$.

15. Låt $A^2 = A$, $B^2 = B$ och $AB = BA$. Förenkla uttrycket

    $U = (A^2 + 2AB + E)(B^2 - 3BA + 2E)$, där E är en enhetsmatris.

    Svar: Transformera: $U = (A+2AB+E)(B-3BA+2E) = AB - 3AB + 2A + 2AB - 6AB + 4AB + B - 3AB + 2E = -5AB + 2A + B + 2E$.

16. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 & 6 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & -9 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

    Beräkna den produkt av AB, AC, BC som har mening.

    Svar: Obs A är en (2×4)-matris, B är en (2×3)-matris och C är en (3×3)-matris. Bara BC har mening. Räkna $BC = \begin{pmatrix} 79 & -39 & 30 \\ -24 & 12 & -30 \end{pmatrix}$

17. Låt O (resp. E) vara nollmatrisen (resp. enhetsmatrisen) av typ (2×2). Ange minst en real lösning till ekvationen $X^6 + 2X^3 + E = O$. Kan ni föreslå tre?

Svar: Obs $VL = (X^3 + E)^2$ och matriser som löser ekv $X^3 + E = O$, löser ekv $X^6 + 2X^3 + E = O$. Notera att $(-E)^3 = -E$. Så är $X = -E$ en lösning till ekv $X^3 + E = O$ och även ekv $X^6 + 2X^3 + E = O$. Dessutom är $X_2 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ och $X_3 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{-\pi}{3}) & -\sin(\frac{-\pi}{3}) \\ \sin(\frac{-\pi}{3}) & \cos(\frac{-\pi}{3}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ lösningar till både ekvationerna.

18. Betrakta den linjära avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 3x_3 + x_6 \\ y_2 &= x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen.

Svar: $n = 6,\ m = 2$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

19. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (2, 5)$ under rotationen 60 grader i origo.

Svar: Rotationsmatrisen: $A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.
Blden av vektor $\overline{u} = (2, 5)$ under rotationen 60 grader i origo är
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 - 5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 5 \end{pmatrix}$

20. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vara avbildningsmatrisen för en linjär avbildning f i x, y-planet. Vad är f för en avbildning? Välj en av följande alternativ:

(a) f är en ortogonal proektion på x-axeln;
(b) f är en spegling i y-axeln;
(c) f är en rotation i origo vinkeln π.

Svar: Obs att

(a) den ortogonala proektionen på x-axeln har matrisen $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) speglingen i y-axeln har matrisen $A_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) rotationen i origo vinkeln π har matrisen $A_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Så väljer man (c).