Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2021-10-29 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Betrakta ett parallellogram i rummet med hörn i punkterna A, $B(1,2,3)$, $C(-2,1,4)$ och $D(5,-1,3)$. Punkten A ligger mittemot punkten C. Finn koordinater för punkten A.

   Svar: Notera att $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{CD}$, $\overline{CA} = A - C$ och $A = C + \overline{CA}$.

   Räkna $\overline{CB} = B - C = (3,1,-1)$, $\overline{CD} = D - C = (7,-2,-1)$, $\overline{CA} = (10,-1,-2)$ och $A = (8,0,2)$.

2. Låt $A(2,1)$, $B(4,0)$ vara punkter i planet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $1:3$.

   Svar: Använd formeln: $M = \overline{OM} = \frac{3}{4}\overline{OA} + \frac{1}{4}\overline{OB} = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}B = \frac{3}{4}(2,1) + \frac{1}{4}(4,0) = \frac{1}{4}(10,6)$.

3. Låt $A(1,2)$, $B(3,4), C(1,-1)$ vara punkter i planet. Finn cos av vinkeln B.

   Svar: Notera att $\cos B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}$.

   Räkna: $\overline{BA} = (-2,-2)$, $\overline{BC} = (-2,-5)$, $\overline{BA}\cdot\overline{BC} = 14$, $|\overline{BA}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{29}$. Så $\cos B = \frac{7}{\sqrt{58}}$.

4. Finn den ortogonala projektionen av vektor $\overline{u} = (2,-1)$ på linjen $L: 4x - y + 3 = 0$.

   Svar: Notera att $\overline{n} = (4,-1)$ är en normal vektor till linjen L. Så är $\overline{v} = (1,4)$ en riktningsvektor till linjen L.

   Använd formeln: $pr_L\overline{u} = pr_{\overline{v}}\overline{u} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\cdot\overline{v}$.

   Räkna $\overline{u}\cdot\overline{v} = -2$, $|\overline{v}|^2 = 17$. Så $pr_L\overline{u} = \frac{-2}{17}\cdot(1,4)$.

5. Betrakta punkterna $A(1,2,10)$, $B(0,1,2)$, $C(2,4,1)$ i rummet. Finn arean av triangeln ΔABC.

   Svar: Använd formeln: arean S av ΔABC är lika med $\frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

   Räkna: $\overline{AB} = (-1,-1,-8)$, $\overline{AC} = (1,2,-9)$, $\overline{AB} \times \overline{AC} = (25,-17,-1)$, $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{915}$. Så $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{915}$.

6. Vektorerna $\overline{u} = (1,2,10)$, $\overline{v} = (0,2,1)$, $\overline{w} = (2,4,0)$ är avsatta från origo. Finn volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna?

   Svar: Använd formeln: $V = |(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}|$.

   Räkna: $\overline{u} \times \overline{v} = (-18,-1,2)$, $(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = -40$. Så $V = 40$.

7. Finn ekv på *parameter* form för den räta linje som går genom punkterna $A(4,3,-2)$ och $B(-2,5,4)$.

   Svar: Notera att $\overline{AB}$ är en riktningsvektor till linjen.

   Räkna: $\overline{AB} = (-6,2,6)$. Linjens ekv är $\begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$, $t \in R$.

8. Vilka av ekvationer beskriver samma linje i planet

$$L_1 : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \quad L_2 : \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 8 - 2t \end{cases}, \quad L_3 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}.$$

   Svar: Notera att $\overline{v_1} = (4,2)$, $\overline{v_2} = (4,-2)$, $\overline{v_3} = (-2,1)$ är rinktningsvektorer till linjerna L_1, L_2, L_3 resp., $\overline{v_2} || \overline{v_3}$ och punkten $P(-1,8)$ hör till både linjerna L_2 och L_3. Så $L_2 = L_3$.

9. Finn alla enhetsvektorer som är vinkelräta mot planet $3x + 5y - 2z = 0$.

   Svar: Notera att $\overline{n} = (3,5,-2)$ är en normal vektor till planet och $|\overline{n}| = \sqrt{38}$.

   Alla enhetsvektorer till planet är $\pm\frac{1}{|\overline{n}|} \cdot \overline{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{38}} \cdot (3,5,-2)$.

10. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(1,3,0)$, $B(2,5,-3)$, $C(3,-2,5)$.

    Svar: Notera att en normal vektor till planet är $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC}$.

    Räkna: $\overline{AB} = (1,2,-3)$, $\overline{AC} = (2,-5,5)$ och $\overline{n} = (-5,-11,-9)$.

    Så får vi planets ekv:

    $(-5)(x-1) + (-11)(y-3) + (-9)(z-0) = 0$ eller $5x + 11y + 9z - 38 = 0$.

11. Finn avståndet från punkten $A(-1,4,2)$ till planet $x+3y-2z=-5$.

    Svar: Notera att $\overline{n}=(1,3,-2)$ är en normal vektor till planet, $|\overline{n}|=\sqrt{14}$ och $x+3y-2z+5=0$ är planets ekv. Använd formeln för avståndet mellan en punkt och ett plan.

    Räkna: avståndet är $\frac{|(-1)+3\cdot(4)-2\cdot(2)+5|}{|\overline{n}|}=\frac{12}{\sqrt{14}}$.

12. Låt $\overline{u}=(7,2,-2,1)$, $\overline{v}=(2,-1,0,4)$ och $\overline{w}=(-1,4,3,5)$ vara vektorer från R^4 med standardoperationer: addition och multiplikation med en konstant. Finn vektorn $\overline{x}=3(\overline{u}+\overline{v})-4\overline{w}$.

    Svar: Räkna: $\overline{u}+\overline{v}=(9,1,-2,5)$, $3\cdot(\overline{u}+\overline{v})=(27,3,-6,15)$, $4\cdot\overline{w}=(-4,16,12,20)$ och $\overline{x}=(31,-13,-18,-5)$.

13. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u}\cdot\overline{v}$, $\overline{v}\cdot\overline{w}$ eller $\overline{u}\cdot\overline{w}$ som har mening, där $\overline{u}=(7,2,-1,5)$ och $\overline{v}=(-1,4,3,7,1)$ och $\overline{w}=(-2,0,5,7)$.

    Svar: Notera att $\overline{u},\overline{w}\in R^4$ och $\overline{v}\in R^5$. Så existerar bara $\overline{u}\cdot\overline{w}=16$.

14. Betrakta vektorrumet V som består av alla polynom av grad t o m 2 definierade på intervallet $[0,2]$ med addition: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, och multiplikation med ett tal: $(k\cdot f)(x)=k\cdot f(x)$, för varje $x\in[0,2]$ (man behöver ej att visa att V är ett vektorrum).

    Vilka av följande delmängder till V är underrum till V:

    $M_0=\{f\in V: f(0)=0\}, M_1=\{f\in V: f(1)=1$ eller

    $M_2=\{f\in V: f(2)=2\}$?

    Svar: Enligt kriteriet har vi bara M_0.

15. Förse vektorrummet V från förra uppgiften med skalärprodukten

    $(f,g)=7\cdot\int_0^2 f(x)g(x)dx$

    (man behöver ej att visa att formeln definierar en skalärprodukt på V).

    Finn längden av funktionen $f(x)=x^2-x$ i det euklidiska rummet.

    Svar: Notera att $|f|^2=(f,f)$.

    Räkna: $|f|^2=7\cdot\int_0^2 f(x)f(x)dx=7\cdot\int_0^2(x^2-x)\cdot(x^2-x)dx=$

    $7\cdot\int_0^2(x^4-2x^3+x^2)dx=7\cdot(\frac{32}{5}-8+\frac{8}{3})=\frac{112}{15}$.

16. Finn cos av vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ om $|3\overline{u}-2\overline{v}|=5$ och $|\overline{u}|=1$, $|\overline{v}|=3$.

    Svar: Låt ϕ vara vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Notera att $\cos\phi=\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|}$.

Finn $\overline{u} \cdot \overline{v}$. Kvadrera likheten $|3\overline{u} - 2\overline{v}| = 5$. Man får $|3\overline{u} - 2\overline{v}|^2 = 25$ eller $(3\overline{u} - 2\overline{v}) \cdot (3\overline{u} - 2\overline{v}) = 25$ eller $9 \cdot |\overline{u}|^2 - 12 \cdot (\overline{u} \cdot \overline{v}) + 4 \cdot |\overline{v}|^2 = 25$.

Så $\overline{u} \cdot \overline{v} = \frac{5}{3}$ och $\cos\phi = \frac{5}{9}$.

17. Vilka av följande matriser är diagonalmatriser?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Svar: C.

18. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Beräkna de produkter av AB, AC, BC eller CB som har mening.

Svar: Notera att A är en (1×3)-matris, B är en (2×3)-matris, A är en (2×2)-matris, och bara produkten CB har mening.

Räkna: $CB = \begin{pmatrix} 80 & 20 & -54 \\ 24 & 24 & -9 \end{pmatrix}$

19. Ange två (2×2)-matriser A och B sådana att $AB \neq BA$.

Svar: till ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Notera att $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $AB \neq BA$.

20. Låt O (resp. E) vara nollmatrisen (resp. enhetsmatrisen) av typ (2×2). Ange fem olika lösningar till ekv $X^2 - 2E = O$.

Svar: till ex. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.