Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kontrollskrivning för Linjär algebra (TATA16)
2006-11-11 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Skriv alla svar på EN sida.
Minst 10 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen.
Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.

1. Låt $A(1,2),\ B(3,4), C(0,3)$ vara punkter med koordinater i ett ortonormerat koordinatsystem. Finn cos av vinkeln ABC.

   Svar: $cosABC = \frac{2}{\sqrt{5}}$

2. Låt $A(1,2,1),\ B(3,4,0)$ vara punkter med koordinater i ett koordinatsystem. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $3:1$. Svar: $M(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{4})$

3. Finn ortogonala proektionen av vektor $\overline{u} = (1,1,1)$ på linjen L som har en riktningsvektor $\overline{v} = (3,4,0)$.

   Svar: $proj_L\overline{u} = \frac{7}{25}(3,4,0)$

4. Låt $A(0,0,0),\ B(2,3,4),\ C(4,3,2)$ vara punkter med koordinater i ett ortonormerat koordinatsystem. Finn arean av parallellogramen som spänns upp av vektorerna $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$.

   Svar: $A = 6\sqrt{6}$

5. Vektorerna $\overline{u} = (1,2,1),\ \overline{v} = (0,2,1),\ \overline{u} = (2,4,0)$ är avsatta från origo. Finn volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna?

   Svar: $V = 4$

6. Finn ekv på parameterfri form för den rätta linjen som går genom punkterna $A(-1,2),\ B(3,5)$.

   Svar: $3x - 4y + 11 = 0$

7. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(0,2,3)$, $B(3,4,5),\ C(1,1,1)$.

   Svar: $2x - 8y + 5z + 1 = 0$

8. Finn ekv på parameterform för den rätta linje i rummet som går genom punkten $M(1,2,3)$ och som är vinkelrätt till planet $2x-3y+z=11$.

   Svar:
$$\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 2-3t \\ z &= 3+t \end{aligned}$$

9. Finn avståndet från punkten $A(1,0,2)$ till planet $2x+3y-z=1$.

   Svar: $\frac{1}{\sqrt{14}}$

10. Finn avståndet mellan linjerna $L_1 : x=-1+t,\ y=3+t,\ z=-t$ och $L_2 : x=2+t,\ y=t,\ z=-1-t$.

    Svar: $\sqrt{\frac{56}{3}}$

11. Finn längden av vektorn $\overline{u}=(-1,2,-3,4)$ i det euklidiska rummet R^4.

    Svar: $\sqrt{30}$

12. Finn skalärprodukten $\overline{u}\cdot\overline{v}$ om $|3\overline{u}+2\overline{v}|=6$ och $|\overline{u}|=2$, $|\overline{v}|=1$.

    Svar: $\overline{u}\cdot\overline{v}=-\frac{1}{3}$

13. Betrakta matriser
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    Vilka av dem är diagonalmatriser?

    Svar: A, D

14. Betrakta matriser
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

    Beräkna den produkt av $AB,\ BC,\ CA$ som har mening.

    Svar:
$$CA=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Betrakta den avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av
$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1+3x_2+4x_3 \\ y_2 &= -x_1+x_2-2x_3. \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen i fall avbildningen är linjär.

Svar: $n = 3, m = 2$ och

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

16. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (2, 3)$ under rotationen med -30 grader.

    Svar:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ -1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

17. Låt T vara en linjär avbildning från R^2 till R^2 och $T(\overline{e}_1) = (1, 2)$ och $T(\overline{e}_2) = (4, 5)$. Finn $T(1, 3)$.

    Svar: $T(1, 3) = (13, 17)$

18. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen som ges av en ortogonal proektion på x-axeln, följd av en spegling i y-axeln.

    Svar:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4.$$

    Svar: $x_1 = 2t - p - 3s + 4$, $x_2 = t$, $x_3 = p$, $x_4 = s$, där t, p, s är godtyckliga reella tal

20. För vilka reella tal k har följande ekvationssystem inga lösningar,

$$\begin{aligned} x + ky &= \tfrac{1}{2} \\ kx + 4y &= 1. \end{aligned}$$

    Svar: $k = -2$