Övningskrivning för Linjär algebra (TATA16)

1. Låt $A(1,2),\ B(3,4)$ vara punkter med koordinater i ett koordinatsystem. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $1:2$.

   Tips: Kolla uppgift 1.7, Svar: $M(\frac{5}{3},\frac{8}{3})$.

2. Låt $A(1,2,3),\ B(3,4,5), C(0,1,-1)$ vara punkter med koordinater i ett ortonormerat koordinatsystem. Finn cos av vinkeln BAC.

   Tips: Finn vektorer $\overline{AB}, \overline{AC}$; skriv ner skalärprodukten på två sätt: kolla s. 28, s. 32, ta fram cosinus. Svar: $-\frac{2}{\sqrt{6}}$.

3. Finn ortogonala proektionen av vektor $\overline{u} = (2,1)$ på linjen L som har en riktningsvektor $\overline{v} = (3,4)$.

   Tips: Kolla exempel 1.26, Svar: $\overline{u}_L (= \mathrm{proj}_L \overline{u}) = \frac{1}{5}(6,8)$.

4. Låt $A(1,1,1),\ B(2,3,4),\ C(4,3,2)$ vara punkter med koordinater i ett ortonormerat koordinatsystem. Finn arean av triangeln ABC.

   Tips: Finn vektorer $\overline{AB}, \overline{AC}$, längden av vektor $\overline{AB} \times \overline{AC}$ delad med 2 ger Svar: $2\sqrt{6}$.

5. Avgör om vektorerna $\overline{u} = (1,2,3),\ \overline{v} = (0,2,1),\ \overline{u} = (1,4,0)$ ligger i samma plan?

   Tips: Kolla exempel 1.3.7, Svar: de ligger ej i samma plan

6. Finn ekv på parameterfria form för den rätta linjen som går genom punkterna $A(1,2),\ B(3,4)$.

   Tips: Finn vektor $\overline{AB}$ som är en riktningsvektor för linjen, m h a denna och punkten A (eller B) skriv ner ekv på parameterform för linjen, lös ut parametern ur båda ekv, jämför. Svar: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2}$ eller $x - y + 1 = 0$.

7. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(0,2,3)$, $B(3,4,5),\ C(0,1,1)$.

   Tips: En normal till planet är vektor $\overline{AB} \times \overline{AC}$, sedan använd exempel 1.43. Svar $2x - 6y + 3z + 3 = 0$.

8. Finn ekv på parameterform för den rätta linje i rummet som går genom punkten $M(1,2,3)$ och som är vinkelrätt till planet $2x - 3y + z = 11$.

   Tips: En riktningsvektor till linjen är en normal till planet, Svar: $x = 1 + 2t,\ y = 2 - 3t,\ z = 3 + t$.

9. Finn avståndet mellan två plan $2x + 3y - z = 0$ och $2x + 3y - z = 1$.

   Tips: Betrakta en punkt, säg $A(1, 0, 2)$, på första planet och en punkt, säg $B(1, 0, 1)$ på andra planet; längden av ortogonala proektionen av vektor $\overline{AB}$ på en normal till planen ger Svar: $\frac{1}{\sqrt{14}}$

10. Finn avståndet från punkten $M(1, 2, 3)$ till linjen $L : x = 2 + t,\ y = t,\ z = -1 - t$.

    Tips: Betrakta en punkt på linjen, säg $A(2, 0, -1)$, ortogonalt projecera vektor $\overline{MA}$ på linjen (använd en riktningsvektor för linjen), längden av differensen $\overline{MA} - \overline{MA}_L$ är avståndet Svar: $3\sqrt{2}$.

11. För vilket reellt tal k är två vektorerna i R^4, $\overline{u} = (1, 2, 3, k)$ och $\overline{v} = (k, 2, 3, 4)$, ortogonala med avseende på den euklidiska skalärprodukten?

    Tips: Skriv ner skalärprodukten på koordinatform för vektorerna, denna måste vara 0, lös ut k Svar: $-\frac{13}{5}$

12. Finn skalärprodukten $\overline{u} \cdot \overline{v}$ om $|\overline{u} + \overline{v}| = 4$ och $|\overline{u} - \overline{v}| = 3$.

    Tips: Kvadrera både likheterna, använd egenskaper hos skalärprodukten och lös ut $\overline{u} \cdot \overline{v}$ ur det nya systemet Svar: $\frac{7}{4}$.

13. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

    Beräkna den produkt av $AB,\ BC,\ BA$ som har mening.

    Tips: Kolla typer av matriser Svar:

$$BA = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -4 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

    Vilka av dem är symmetriska?

    Tips: Repetera definitionen Svar: $B,\ D$.

15. Betrakta den avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= -x_1 + x_2 \\ y_3 &= 4x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningensmatris i fall avbildningen är linjär.

Svar: $n = 2,\ m = 3,$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Låt T vara en linjär avbildning från R^2 till R^3 och $T(\overline{e}_1) = (1, 2, 3)$ och $T(\overline{e}_2) = (3, 4, 5)$. Finn $T(2, 1)$.

Tips: Observera att vektorn $(2, 1) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, använd linjera egenskaper Svar: $T(2, 1) = (5, 8, 11)$

17. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (2, 3)$ under rotationen med -60 grader.

Tips: Finn matrisen för rotationen och multiplicera denna med vektorn (skriven som en kolonnmatris). Svar:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 + 3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} + 3 \end{pmatrix}$$

18. Hitta avbildningensmatris för avbildningen som ges av en ortogonal proektion på y-axeln, följd av en spegling i x-axeln.

Tips: använd satsen om sammansatta avbildningar samt matriser för nämnda avbildningar Svar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

19. Bestäm lösningsmängden till ekvationssystem

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2.$$

Tips: Lös ut en variabel, säg x_1 ur ekv, betrakta övriga variabler som parametrar Svar: $x_1 = -2t + 3p - s + 2,\ x_2 = t,\ x_3 = p,\ x_4 = s$, där t, p, s är godtyckliga reella tal.

20. För vilka reella tal k har följande ekvationssystem oändligt många lösningar,

$$\begin{aligned} x + ky &= \tfrac{1}{2} \\ kx + 4y &= 1. \end{aligned}$$

Tips: Använd Gauss elimination, villkoret på k: andra raden ska bestå av nollor Svar $k = 2$.