Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2016-01-13 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Bestäm det värde på konstanten k för vilket de tre planen $x+2y-z=k$, $4x+8y+kz=4$, $2x+ky+2z=2$ skär varandra längs en rät linje (1p). Ange linjens ekvation på parameter form (1p) och dess avstånd till origo (1p).

   Lsg. (i)-(ii). Bilda ett system av de här ekvationerna och notera att de tre planen skär varandra längs en rät linje omm systemet har en parameter lösning. Repetera att systemet har precis en lösning omm det(ekvationssystem matris) $\neq 0$. Så kandidatvärde på k är lösningarna till ekv

   $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & k \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix} = 0$. Man har två värden: $k = \pm 4$.

   Gör undersökning. Först, sätt in $k=-4$ i systemet och lös detta med Gausselimination. Det finns inga lösningar. $k=-4$ passar ej.

   Andra, sätt in $k=4$ i systemet och lös detta med Gausselimination. Man får en parameterlösning: $x_1 = -2t + \frac{5}{2}, x_2 = t, x_3 = \frac{-3}{2}, t \in R$.

   Nu svarar vi $k=4$ och linjensekvation är $x_1 = -2t + \frac{5}{2}, x_2 = t, x_3 = \frac{-3}{2}, t \in R$. Kalla linjen L.

   (iii). Rita en bild: origo O och linjen L. Obs att punkten $P(\frac{5}{2}, 0, \frac{-3}{2})$ ligger på L och vektorn $\overline{a} = (-2,1,0)$ är parallell med L. Använd nu ortogonal projektion av vektorn $\overline{OP}$ på $\overline{a}$. Nämligen, avståndet är $|\overline{OP} - \text{proj}_{\overline{a}}\overline{OP}| = |(\frac{5}{2}, 0, \frac{-3}{2}) - (2,-1,0)| = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

2. Det finns två plan α och β. Planet α har ekvationen $x+z=2$ och planet β har ekvationen $2x+y-z=1$. Låt punkterna i planet β speglas i planet α varvid spegelpunkterna bildar ett nytt plan γ. Bestäm ekvationen för detta plan γ. (3p)

Lsg. Repetera vad en spegling i ett plan betyder. Obs att skärningslinjen L av planen α och β hör till γ. Finn ekv för L genom att lösa systemet: $x+z=2$ och $2x+y-z=1$. Man får $L: x_1 = 2-t, x_2 = -3+3t, x_3 = t, t \in R$. Obs $P(2,-3,0)$ är en punkt på L. För att skriva ner γ's ekv behöver vi en punkt till på γ utanför L eller en normal till γ. Vi hittar en normal. Notera att vektorn $\overline{n_\alpha} = (1,0,1)$ är vinkelrät mot α och $\overline{n_\beta} = (2,1,-1)$ är vinkelrät mot β.

Betrakta ortogonalt (mot L) snitt av rummet. Detta är ett plan. I det här planet (ert papper) rita en bild. På bilden är linjen L en punkt L och planen α och β är räta linjer α och β som går genom L. Spegla linjen β i linjen α och rita spegelbildlinjen γ som också går genom L. Avsätt från punkten L vektorerna $\overline{n_\alpha}$ och $\overline{n_\beta}$. Hur hittar vi en normal $\overline{n_\gamma}$ till planet γ? Tänk geometriskt.

Obs att $\overline{n_\gamma} = -\ \mathrm{proj}_{\overline{n_\alpha}}\overline{n_\beta} + (-\ \mathrm{proj}_{\overline{n_\alpha}}\overline{n_\beta} + \overline{n_\beta}) = -2\ \mathrm{proj}_{\overline{n_\alpha}} + \overline{n_\beta} = -2(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (2,1,-1) = (1,1,-2)$.

Nu är γ's ekv: $x+y-2z+D=0$. Man får värde på D genom sätta in punkten P i ekvationen: $1\cdot 2 + 1\cdot(-3) - 2\cdot 0 + D = 0$. Så är $D=1$ och γ's ekvationen är $x+y-2z+1=0$.

3. Visa att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

saknar lösningar (1p) och finn sedan minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till systemet (2p).

Lsg. Först visa m h a Gausselimination att systemet saknar lösningar. För att hitta minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ ställ up ekv $A^tAX = A^tB$. Obs $A^tA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ och $A^tB = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Lös systemet till ex. med Gausselimination eller Cramers formel och få fram minsta kvadratlösningen $\overline{x^*} = (\frac{1}{2}, 1)$.

4. Finn determinanten (1p) och inversen (2p) till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(kontrollera svaret).

Lsg. Finn determinanten av A, till ex. genom att utveckla denna längs sista raden: $\det A = 1 \cdot (12 - 21) + 8 \cdot (7 - 6) = -9 + 8 = -1$.

Inversen till A. Använd metoden: $A|E \to \ldots \to E|A^{-1}$. Vi får $A^{-1} = \begin{pmatrix} -56 & 16 & 9 \\ 18 & -5 & -3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Glöm ej att göra kontroll: $A \cdot A^{-1} = E$.

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet $X' = AX$, där A är avbildningsmatrisen för den ortogonala proektionen av rummet R^3 på planet $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$. (2p)

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = 2,\ x_2(0) = -1,\ x_3(0) = 1$. (1p)

Lsg: (i) Vi behöver en bas av egenvektorer till matrisen A.

Obs att vektorn $\overline{n} = (3, 1, -1)$ är vinkelrät mot planet. Den ortogonala projektionen avbildar vektorn $\overline{n}$ på nollvektorn och alla vektorena som är vinkelräta mot $\overline{n}$ (d v s som "ligger" i planet) avbildas på sig själv. Så har matrisen A bara två egenvärden: $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 1$ och en möjlig bas är $\overline{f_1} = (3, 1, -1)$ (svarar mot λ_1), $\overline{f_2} = (0, 1, 1)$ (svarar mot λ_2), $\overline{f_3} = (1, 0, 3)$ (svarar mot λ_2).

Den allmänna lösningen är:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in R \text{ och}$$

c_1, c_2, c_3 är godtyckliga konstanter.

Alternativt, man kan bestämma avbildningsmatrisen A genom att använda formeln för den ortogonala projektionen:

$\overline{y} = \overline{x} -$ proj$_{\overline{n}}\overline{x}$. Då får man $A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Sedan lös ekv $|A - \lambda E| = 0$ för att få egenvärden $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 1$. Använd Gausselimination för att bestämma motsvarande egenvektorer och till sist en bas av egenvektorer. Avsluta som ovan.

(ii) Svar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{4}{11} e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{15}{11}\right) e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{11} e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in R$$

6. Låt $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 x_2$.

(i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar formen Q till ett nytt uttryck i variablerna y_1, y_2 utan termen $y_1 y_2$ samt det här nya uttrycket (2p).

Lsg. Formens matris: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Finn egen värden: $|A - \lambda \cdot E| = 0$. Man får $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 6$.

Motsvarande egenvektorer: $\begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$ (svarar mot $\lambda_1 = 1$) och $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$ (svarar mot $\lambda_2 = 6$).

Ange en ON-bas av egenvektorer, till ex.: $\overline{p_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_1 = 1$) och $\overline{p_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_2 = 6$).

Variabel substitution: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ och motsvarande uttryck för formen är $Q = y_1^2 + 6y_2^2$.

(ii) Finn största och minsta värden för $|\overline{x}|$ då $Q(\overline{x}) = 3$ (1p).

Lsg. Repetera att $\lambda_{\min} \cdot |\overline{x}|^2 \leq Q(\overline{x}) \leq \lambda_{\max} \cdot |\overline{x}|^2$. Likheterna antas på motsvarande egenvektorer. Obs $\lambda_{\min} = 1$ och $\lambda_{\max} = 6$. Minsta värdet på $|\overline{x}|$ då $Q(\overline{x}) = 3$ får man ur ekv $\lambda_{\max} \cdot |\overline{x}|^2 = 3$
d v s $|\overline{x}|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Största värdet på $|\overline{x}|$ då $Q(\overline{x}) = 3$ får man ur ekv $\lambda_{\min} \cdot |\overline{x}|^2 = 3$ d v s $|\overline{x}|_{\max} = \sqrt{3}$.