LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2016-03-30 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. I rummet betrakta planet $\pi : 2x+y-z+7=0$, linjen $L : x=-2+t, y=1+2t, z=4t, t \in R$, och punkten $P(-2,-2,1)$.

   (i) Visa att linjen L är parallell med planet π och punkten P ligger på planet (1p)
   Lsg. a) Insättningen av P's koordinater i planets ekv.
   $2\cdot(-2)+1\cdot(-2)-1\cdot 1+7=0$ vhv
   b) Obs vektorn $\overline{v}(1,2,4)$ är en riktningsvektor till linjen L och vektorn $\overline{n}(2,1,-1)$ är en normal vektor till planet. Så kontrollerar vi att $\overline{v}\perp\overline{n}$: $\overline{v}\cdot\overline{n}=2\cdot 1+1\cdot 2+(-1)\cdot 4=0$.

   (ii) Finn ekvationen på parameter form för den räta linje M som går genom punkten P och är vinkelrät mot planet π (1p)
   Lsg. En riktningsvektor för linjen M är vektorn $\overline{n}$. Så är M's ekv $x=-2+2t, y=-2+t, z=1-t, t\in R$.

   (iii) Finn ekv för det plan som innehåller linjen L och är parallell med linjen M samt avståndet från linjen M till det här planet. (1p)
   Lsg. En normal vektor till det nya planet α är $\overline{v}\times\overline{n}=(-6,9,-3)=-3\cdot(2,-3,1)$. Så är α's ekv $2x-3y+z+D=0$. D hittar vi genom insättningen av en punkt på L (till ex. (-2,1,0)) i ekvationen. Vi har $D=7$ och α's ekv: $2x-3y+z+7=0$.
   Nu avståndet mellan α och linjen M är samma som avståndet mellan α och punkten P och är lika med $\frac{|2\cdot(-2)-3(-2)+1+7|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1}}=\frac{10}{\sqrt{14}}$.

2. I rummet betraktar vi en pyramid med fyra hörn. Till varje av pyramidens fyra sidor s_1,s_2,s_3,s_4 ordnar vi en vektor, $\overline{v_1}$ till s_1, $\overline{v_2}$ till s_2, $\overline{v_3}$ till s_3 och $\overline{v_4}$ till s_4 så att för varje index $i=1,2,3,4$, vektorn $\overline{v_i}$ är vinkelrät mot sidan s_i och pekar ut ur pyramiden samt $\overline{v_i}$'s längd är lika med arean av sidan s_i. Visa att $\overline{v_1}+\overline{v_2}+\overline{v_3}+\overline{v_4}=\overline{0}$. (3p).

Lsg. Använd vektorprodukten och en bild. Välj ett hörn D på pyramiden och betrakta tre vektorer $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ som går från det valde hörnet till tre övriga hörn A, B, C. Uttryck tre normaler till tre sidor som innehåller D, till ex. $\overline{v_1} = \frac{1}{2}(\overline{b} \times \overline{a})$ (sidan DBA), $\overline{v_2} = \frac{1}{2}(\overline{a} \times \overline{c})$ (sidan DAC), $\overline{v_3} = \frac{1}{2}(\overline{c} \times \overline{b})$ (sidan DCB). Fjärde vektorn $\overline{v_4} = \frac{1}{2}((\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a}))$ (sidan DCB). Kontrollera att $\overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3} + \overline{v_4} = \overline{0}$.

3. Visa att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

saknar lösningar (1p) och finn sedan minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till systemet (2p).

Lsg. (i) Använd Gausselimination.

(ii) Lös ekv: $A^tAX = A^tB$. Obs $A^tA = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$ och $A^tB = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vi får att $x_1 = \frac{17}{15}, x_2 = \frac{3}{5}$.

4. Avgör för vilka värde på k har systemet

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= k \\ 4x + ky + 8z &= 4 \\ 2x + 2y + kz &= 2 \end{aligned}$$

inga lösningar, oändligt många lösningar, precis en lösning.

Ange lösningsmängden för varje värde på k. (3p).

Lsg. Lös ekv: $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & k & 8 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix} = 0$ eller $k^2 - 16 = 0$. Vi får $k_1 = -4, k_2 = 4$. Använd Gausselimination för att ta reda på lösningsmängderna.

$k_1 = -4$. Inga lösningar.

$k_2 = 4$. En parameterlösning: $x_1 = \frac{5}{2} - 2t, x_2 = -\frac{3}{2}, x_3 = t, t \in R$.

$k \neq \pm 4$. En enkel lösning: $x_1 = k, x_2 = \frac{4(1-k)}{k+4}, x_3 = \frac{2(1-k)}{k+4}$.

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet $X' = AX$, där A är avbildningsmatrisen för speglingen av rummet R^3 i planet $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$. (2p)

Lsg. Använd geometri. Därför att vi har en spegling så är egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 1$. En bas av egenvektorer för rummet är (til ex.) $\overline{p}_1, = (3, 1, -1)$ (svarar mot $\lambda_1 = -1$), $\overline{p}_2 = (0, 1, 1), \overline{p}_3 = (1, 0, 3)$ (svarar mot $\lambda_2 = 1$). Alternativt, finn matrisen för avbildningen: $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -7 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, lös ekv $\det(A - \lambda E) = 0$, få rötterna $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 1$ och leta efter motsvarande egenvektorer, sedan bilda en bas av egenvektorer, till ex. som ovan.

Nu den allmänna lsg är $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \overline{p}_1 + c_2 \cdot e^t \cdot \overline{p}_2 + c_3 \cdot e^t \cdot \overline{p}_3$, c_1, c_2, c_3 är godtyckliga konstanter.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = 2,\ x_2(1) = -1,\ x_3(1) = 3$. (1p)

Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{2e}{11} \cdot e^{-t} \cdot \overline{p}_1 + \frac{-13}{11e} \cdot e^t \cdot \overline{p}_2 + \frac{16}{11e} \cdot e^t \cdot \overline{p}_3$

6. Låt $Q(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

(i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar formen Q till ett nytt uttryck i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2 samt det här nya uttrycket (2p).

Lsg. Formensmatris $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, egenvärden: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7$. En ON-bas bestående av motsvarande egenvektorer, till ex.: $\overline{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \overline{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$. Matrisen $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Formen i de nya variablerna y_1, y_2 är $Q(y_1, y_2) = 2 \cdot y_1^2 + 7 \cdot y_2^2$.

(ii) Finn största och minsta värden för $|\overline{x}|$ då $Q(\overline{x}) = 2$ (1p).

Svar: min $= \sqrt{\frac{2}{7}}$ och max $= 1$.