Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2016-08-23 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Visa att punkterna $A(2,1,-1)$, $B(0,-3,4)$, $C(1,-1,3)$ och $D(1,0,5)$ inte ligger i samma plan (1p).

   Lsg. En ekvation för ett plan är $px+qy+rz+s=0$. Om punkterna ligger i planet har vi följande likheter: $2p+q-r+s=0$, $0p-3q+4r+s=0$, $p-q+3r+s=0$, $p+0q+5r+s=0$. Vi tolkar dem som ett kvadratiskt homogent system m a p variablerna p,q,r,s. Beräkna systemets determinant. Denna är lika med -3. Detta medför att systemet har bara den triviala lsgen: $p=q=r=s=0$. Men ekvationen $0p+0q+0r+0=0$ beskriver inget plan.

   En alternativ lsg. Finn vektorerna $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ och beräkna produkten $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 3 \neq 0$. Det här är också volymen V av parallellepipeden som spänns upp av de här vektorerna. Det betyder att $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ inte hör till ett plan. Så ligger punkterna ej i ett plan.

   (ii) Finn arean av triangeln ΔABC (1p).

   Lsg. Arean är $\frac{1}{2}\cdot|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\cdot|(-2,-4,5)\times(-1,-2,4)| = \frac{\sqrt{45}}{2}$.

   (iii) Vad är längden av höjden i piramiden $ABCD$ med basen ΔABC och toppen D? (1p).

   Lsg. Notera att volymen V av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ kan ocks fås genom formeln
   $V =$ (arean av basen) $\times$ (höjden) $= |\overline{AB}\times\overline{AC}|\times h$, där h är också höjden för piramiden $ABCD$ med basen ΔABC och toppen D. Vi får att $h = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. (i) Bestäm en ON bas $B = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ för det euklidiska rummet R^3 sådan att vektorerna $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2\}$ utgör en bas för underrummet $W = \{(x,y,z) : x+3y-2z=0\}$ av rummet R^3 (2p).

Lsg. Obs vektorn $\overline{n} = (1,3,-2)$ är en normal till planet $x + 3y - 2z = 0$. Sätt $\overline{f_3} = \frac{1}{|\overline{n}|} \cdot \overline{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1,3,-2)$. Välj en icke-trivial lsg till ekv $x + 3y - 2z = 0$, till ex. $x = 2, y = 0, z = 1$. Sätt $\overline{a} = (2,0,1)$ och $\overline{f_1} = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2,0,1)$. Obs att vektorn $\overline{b} = \overline{f_1} \times \overline{f_3} = \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot (-3,5,6)$ är parallell med planet och $\overline{b} = 1$. Sätt $\overline{f_2} = \overline{b}$. Notera att vektorerna $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ utgör en ON-bas för rummet R^3 och vektorerna $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2\}$ utgör en ON-bas för planet.

(ii) Bestäm koordinaterna av vektorn $\overline{a} = (2,1,-3)$ i basen B (1p).
Lsg. Sätt ekv $\overline{a} = x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + x_3\overline{f}_3$ och lös denna. Man får $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, x_2 = -\frac{19}{\sqrt{70}}, x_1 = \frac{11}{\sqrt{14}}$

3. Visa att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

saknar lösningar (1p) och finn sedan minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till systemet (2p).

Lsg. I första delen använd Gauss elimination. I andra delen lös systemet: $A^tA\overline{x} = A^t\overline{b}$. Notera att $A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och lsgen är $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 5x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Lsg. Ekvssystemmatris $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Lös ekv $|A - \lambda E| = 0$. Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 7$. Välj motsvarande egenvektorer, till ex. $\overline{p_1} = (3,-2)$ och $\overline{p_2} = (1,1)$. Den allmänna lsgen är $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1e^{2t}\overline{p_1} + c_2e^{7t}\overline{p_2}$, där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = 5,\ x_2(1) = -3$ (1p).
Lsg. Sätt systemet $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1e^2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2e^7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och lös

ut $c_1 = \frac{8}{5}e^{-2}, c_2 = \frac{1}{5}e^{-7}$. Nu får vi den sökte lsgen $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{8}{5}e^{-2}e^{2t}\overline{p_1} + \frac{1}{5}e^{-7}e^{7t}\overline{p_2}$.

5. Låt $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

   (i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar formen Q till ett nytt uttryck i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2 samt det här nya uttrycket (2p).

   Lsg. Formensmatris $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, egenvärdena $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7$. Välj motsvarande egenvektorer med längden 1, till ex. $\overline{p_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ och $\overline{p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Vi får motsvarande matris $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och formens uttryck i variablerna y_1, y_2 är $3y_1^2 + 7y_2^2$.

   (ii) Finn största och minsta värden för $|\overline{x}|$ då $Q(\overline{x}) = 4$ (1p).

   Lsg. Notera att $3|\overline{x}|^2 \le Q(\overline{x}) \le 7|\overline{x}|^2$ för alla $\overline{x}$ (likheterna antas på egenvektorer). Om $Q(\overline{x}) = 4$ så $3|\overline{x}|^2 \le 4 \le 7|\overline{x}|^2$ eller $|\overline{x}|^2 \le \frac{4}{3}$ och $|\overline{x}|^2 \ge \frac{4}{7}$. Vi får att max $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ och min $= \frac{2}{\sqrt{7}}$

6. Finn A^{2016}, där $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3p)

Lsg. Lös ekv $|A - \lambda E| = 0$. Vi får egenvärdena $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 3$. Finn en bas bestående av egenvektorer för R^3, $\overline{p_1} = (-1, 2, 0)$, $\overline{p_2} = (0, 0, 1)$ och $\overline{p_3} = (1, 0, 2)$. Då får vi att $A = PDP^{-1}$, där $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Finn $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Notera att $A^{2016} = PD^{2016}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2016} \end{pmatrix} P^{-1}$. Multiplicera och få fram ett svar.