LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2017-01-11 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Bestäm ekv på parameter form för linjen L som är skärningslinjen av planen $\alpha_1 : x - y + z = 2$ och $\alpha_2 : x - 2y + z = 1$ (1p).
   Svar: $x = 3 - t,\ y = 1, z = t, t \in R$

   (ii) Bestäm ekv på normalform för det plan β som går genom punkten $M(1, -2, 3)$ och som innehåller linjen L (1p).
   Svar: $3x + y + 3z - 10 = 0$

   (iii) Finn avståndet mellan punkten M och linjen L (1p).
   Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{38}$

2. Finn determinanten av matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

   Svar: 172

3. Visa att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

   saknar lösningar (1p) och finn sedan minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till systemet. Gör kontroll. (2p).
   Svar: Använd Gausselimination först. $\overline{x^*} = (\frac{11}{7}, -\frac{2}{7})$

Vänd !

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \qquad (2p). \end{cases}$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2, t \in R$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller villkoren:
$x_1(1) = -2,\ x_2(1) = 5,$ (1p).
Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 3e^{2t-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{3t-3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$

5. Bestäm den geometriska betydelsen av ekv $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$.

(i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar ekvationen till en ny ekvation i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2 samt den här nya ekvationen (2p).
Svar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ och $3y_1^2 + 7y_2^2 = 1$

(ii) Rita lösningsmängden i x, y-planet. (1p).
Svar: Rita i y_1, y_2-planet ellipsen $\frac{y_1^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{y_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{7}})^2} = 1$. Ange i x_1, x_2-planet axlarna y_1, y_2 m h a egenvektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Sedan placera ellipsen på den nya bilden.

6. (i) Avgör om vektorerna $\overline{a} = (-1, 5, 2), \overline{b} = (2, 6, -1), \overline{c} = (1, 11, 1)$ är linjärt oberoende eller ej (1p).
Svar: $\det[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = 0$. Så är vektorerna lin. beroende.

(ii) Låt A vara en kvadratisk matris och $A^2 + 5A + 7E = O$, där E är enhetsmatrisen och O är nollmatrisen av samma typ som A. Uttryck inversen till A som en linjer kombination av matriserna A och E (1p).
Svar: $A^{-1} = -\frac{1}{7}(A + 5E)$.

(iii) Antag att en kvadratisk form $Q(x_1, x_2)$ har största värdet 4 och minsta värdet -1 på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Vilka egenvärde har den symmetriska matris A som svarar mot Q? (1p).
Svar: $\lambda_{\min} = -\frac{1}{3}$ och $\lambda_{\max} = \frac{4}{3}$