LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2017-04-19 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Anta att F är en ortogonalprojektion av rummet på linjen
   $$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   Beräkna F:s avbildnings matris A. (1p)
   Tips. Till ex. använd standardbasvektorernas bilder med hjälp av projektionsformeln.

   (ii) Finn bilden Q av punkten $P(3, -1, 2)$ under avbildningen F. (1p)

   (iii) Bestäm de punkter på linjen L som ligger på avstånd 4 från punkten Q. (1p)

2. Låt
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
   vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})$ till basen $\mathcal{G} = (\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3})$ d v s $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot T$.

   (i) Finn övergångsmatrisen S från basen $\mathcal{G}$ till basen $\mathcal{F}$ (s. a. $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cdot S$). (2p)
   Tips. Repetera att $S = T^{-1}$, glöm ej att kontrollera svaret genom att beräkna produkten $T \cdot T^{-1}$.

   (ii) Uttryck vektorn $\overline{x} = 3\overline{f_1} + 2\overline{f_2} + 4\overline{f_3}$ i basen $\mathcal{G}$. (1p)

3. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2p)$$

Kontrollera svaret.

(ii) Bestäm vektorn $\overline{d} = A\overline{x^*} - \overline{b}$. Är $\overline{x^*}$ en vanlig lösning till systemet $A\overline{x} = \overline{b}$? (1p).

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 \qquad (2p). \end{cases}$$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller villkoren: $x_1(1) = 2,\ x_2(1) = -3,$ (1p).

5. Betrakta ekv $11x_1^2 + 24x_1x_2 + 4x_2^2 = 2$.

(i) Uttrycket $U = 11x_1^2 + 24x_1x_2 + 4x_2^2$ är en kvadratisk form i variablerna x_1, x_2. Bestäm formens karaktär. (1p).

(ii) Ange sedan en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar ekvationen till en ny ekvation i variablerna y_1, y_2 utan termen $y_1 \cdot y_2$ samt den här nya ekvationen. (1p).

(iii) Vad är det för en kurva? Rita grafen i y_1, y_2-koordinatsystem (1p)

6. Man undersöker flygförmågan av en konstgjord kråka på ett av Linköpings torg. För detta förser man torget med ett ortonormerat koordinatsystem och markerar följder av landnings punkter. Kråkan är förprogrammerad så att koordinater för landningspunkten (x_l, y_l) man kan få från koordinater av uppskjutningspunkten (x_u, y_u) genom följande formel:

$$\begin{cases} x_l = x_u + 2y_u \\ y_l = 3x_u + 2y_u \end{cases}$$

Var kommer kråkan befinna sig på torget efter 26 uppskjutningar om starten var i punkten $(1, 3)$? (3p)

Lycka till !