LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2017-08-22 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta pyramiden $OABC$ i rummet R^3 med $O(0,0,0)$, $A(-4,5,8)$, $B(3,4,5)$ och $C(2,1,-4)$.

   (i) Finn ekv för planet ABC (1p).
   Svar: Finn $\overline{AC} = (6,-4,-12)$, $\overline{AB} = (7,-1,-3)$ och $\overline{AC} \times \overline{AB} = (0,-66,22)$. Välj en normalvektor till planet: $\overline{n} = (0,-3,1)$. Använd en av punkterna A, B, C för att få planets ekv $-3y + z + 7 = 0$.

   (ii) En normal till planet ABC går genom punkten O.
   I vilken punkt P träffar linjen planet? (1p).
   Svar: Normalens ekv på parameter form: $x = 0, y = -3t, z = t, t \in R$. Sätt in uttrycken i planets ekv och få fram värde på parametern t som svarar mot punkten P: $-3(-3t) + t + 7 = 0$ och $t = -\frac{7}{10}$. Stoppa in värdet i normalens ekv för att få fram punkten $P(0, \frac{21}{10}, -\frac{7}{10})$.

   (iii) Finn avståndet från P till hörnet C (1p).
   Svar: Finn $\overline{PC} = \frac{1}{10}(20,-11,-33)$. Avståndet är $|\overline{PC}| = \frac{1}{10}\sqrt{1610}$.

2. (i) Finn avbildningsmatrisen A för ortogonala projektionen på planet $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$ (2p).
   Svar: En normal vektor till planet är $\overline{n} = (1,3,-1)$. Betrakta godtycklig punkt $P(x_1,x_2,x_3)$ i rummet. Bilden på $P's$ ortogonala projektion beteckna som Q och origo som O.
   Notera att $\overline{OQ} = \overline{OP} - \text{proj}_{\overline{n}}\overline{OP} =$
   $\overline{OP} - \frac{\overline{OP}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2} \cdot \overline{n} = (\frac{10x_1-3x_2+x_3}{11}, \frac{-3x_1+2x_2+3x_3}{11}, \frac{x_1+3x_2+10x_3}{11})$.
   Få fram matrisen A ur uttrycken

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

(ii) Ange en ON-bas $\mathcal{B}$ för rummet R^3 bestående av egenvektorer till A (1p).

Svar: Matrisen har egenvärden 0 och 1 (tänk geometriskt). Bilda en ON-bas $\mathcal{E} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ bestående av egenvektorer till A. Till ex. välj $\overline{e_1} = \frac{1}{2}(1,0,1)$, $\overline{e_3} = \frac{1}{11}(1,3,-1)$ och $\overline{e_2} = \overline{e_1} \times \overline{e_3} = \frac{1}{\sqrt{22}}(-3,2,3)$

3. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (2p)$$

Kontrollera svaret.

Svar: Finn $A^tA = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$ och $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Lös ekv $(A^tA)\overline{x}^* = A^t \cdot \overline{b}$. Gausselimination ger $\overline{x}^* = (\frac{34}{83}, \frac{45}{83})$.

(ii) Bestäm vektorn $\overline{d} = A\overline{x^*} - \overline{b}$. Är $\overline{x^*}$ en vanlig lösning till systemet $A\overline{x} = \overline{b}$? (1p).

Svar: Nej, ty $\overline{d} = A\overline{x^*} - \overline{b} = \frac{1}{83}(30, 18, -42) \neq \overline{0}$.

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 5x_1 - x_2. \end{cases} \qquad (2p)$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{-6t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, t, c_1, c_2 \in R$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = -1$, $x_2(1) = 2$ (1p)

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{13}{9} \cdot e^{-6t+6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \cdot e^{3t-3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in R$

5. Betrakta ekv $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3$.

(i) Uttrycket $U = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ är en kvadratisk form i variablerna x_1, x_2. Bestäm formens karaktär. (1p).

Svar: Formens matris $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ har egenvärden $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Båda är positiva. Så är formen pos. definit.

(ii) Ange sedan en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar ekvationen till en ny ekvation i variablerna y_1, y_2 utan termen $y_1 \cdot y_2$ samt den här nya ekvationen. (1p).

Svar: Till ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ och $\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 = 3$.

(iii) Vad är det för en kurva? Rita grafen i x_1, x_2-koordinatsystem (1p)

Svar: en ellips

6. (i) Lös ekvationen $\det A(k) = 0$, där

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & k \\ (k+4) & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2p)

Svar: $k_1 = 1, k_2 = -\frac{5}{3}$.

(ii) Bestäm nollrummet för matrisen $A(k)$, där k är den minsta av lösningarna (1p)

Svar: Lös ekv $A(-\frac{5}{3})\overline{x} = \overline{0}$ själv.