Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2018-01-13 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Bestäm ekv för det plan som går genom punkten $A(3, 2, 1)$ och är vinkelrät mot linjen $L : x = -2 + 2t, y = 1 + t, z = 4 - 3t$ (1p).
Svar: Vektorn $\overline{n}(2, 1, -3)$ är en normalvektor till planet och punkten $A(3, 2, 1)$ hör till planet, så är planetsekvation
$2(x - 3) + (y - 2) - 3(z - 1) = 0$ eller $2x + y - 3z - 5 = 0$.
(ii) Finn skärningspunkten B av linjen och planet (1p).
Svar: Finn värde på parametern t som svarar mot skärningspunkten B genom att stoppa in linjens ekvation i planetsekvation:
$2(-2 + 2t) + (1 + t) - 3(4 - 3t) - 5 = 0$. Man får $t = \frac{10}{7}$ och $B(\frac{6}{7}, \frac{17}{7}, -\frac{2}{7})$.
(iii) Finn radien av sfären som går genom punkten A och har centrum i punkten B samt sfärens ekvation (1p).
Svar: Radien är längden av vektorn $\overline{BA}$. Notera att $\overline{BA} = A - B = (3, 2, 1) - (\frac{6}{7}, \frac{17}{7}, -\frac{2}{7}) = \frac{1}{7}(15, -3, 9)$. Så är $|\overline{BA}| = \frac{1}{7}\sqrt{!5^2 + (-3)^2 + 9^2} = \frac{1}{7}\sqrt{315}$.

2. (i) Bestäm avbildningsmatrisen A för speglingen i planet $3x_1 - x_2 + x_3 = 0$ (2p)
Svar: Vektorn $\overline{n}(3, -1, 1)$ är en normalvektor till planet. Låt O vara origo och $A(x_1, x_2, x_3)$ en godtycklig punkt i rummet. Spegelbilden av vektorn $\overline{OA}$ i planet är vektorn $\overline{OA} - 2\overline{BA}$, där vektorn $\overline{BA}$ är den ortogonala projektionen av $\overline{OA}$ på vektorn $\overline{n}$. Så är $\overline{OA} - 2\overline{BA} = \overline{OA} - 2\frac{\overline{OA}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2} \cdot \overline{n} =$
$(-\frac{7}{11}x_1 + \frac{6}{11}x_2 - \frac{6}{11}x_3, \frac{6}{11}x_1 + \frac{9}{11}x_2 + \frac{2}{11}x_3, -\frac{6}{11}x_1 + \frac{2}{11}x_2 + \frac{9}{11}x_3)$.
Så är $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

(ii) Finn $\overline{u} = A\cdot\overline{v} + A^2\cdot\overline{v} + A^3\cdot\overline{v}\ldots + A^{100}\cdot\overline{v}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (1p).

Tips. Tänk vad en spegling betyder!

Svar: Notera att $\overline{u} = 50\cdot(A\cdot\overline{v} + \overline{v})$ och $A\cdot\overline{v} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -19 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$. Så är $\overline{u} = \frac{100}{11}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$.

3. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (2p)$$

Kontrollera svaret.

Svar: Lös ekvationen $(A^tA)X = A^t\overline{b}$. Minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ är $(\frac{121}{125}, -\frac{36}{125})$

(ii) Ligger vektorn $\overline{b}$ i kolonnrummet till matrisen A? Motivera svaret. (1p).

Svar: Ekvivalent, har systemet $AX = \overline{b}$ vanliga lösningar? Använd Gausselimination. Det finns inga lösningar. Så ligger vektorn $\overline{b}$ ej i kolonnrummet till matrisen A.

4. Låt A vara en (3×3) matris. Vektorerna $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\overline{p_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till A med egenvärdena $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 9$ resp.

(i) Visa att vektorerna bildar en bas för rummet R^3 (1p).

Svar: Enklaste, beräkna $\det(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}) = 2 \neq 0$. Så bildar vektorerna $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}$ en bas i rummet.

(ii) Finn en matris B s. a. $B^2 = A$.

Notera att $A = PDP^{-1}$, där $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ och $D =$

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Finn $P^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Observera att $D = D_1^2$ (*), där $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, och $A = (PD_1P^{-1}) \cdot (PD_1P^{-1})$. Välj $PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 24 & 12 & 3 \\ -16 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ som B. Vilka andra D_1 satisfierar villkoret $(*)$? Hur många B'or till kan man ange?

(2p).

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2. \end{cases} \qquad \text{(2p)}$$

Svar: Lös ekvationen $|A - \lambda E| = 0$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Det finns två lösningar: $\lambda_1 = -3$ och $\lambda_2 = 2$. Finn egenvektorer för egenvärdena: $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ för λ_1 och $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ för λ_2. Den allmänna lösningen är $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där c_1, c_2 är godtyckliga reella tal och $t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(\pi) = 2$, $x_2(\pi) = -5$ (1p)

Svar: Finn c_1, c_2 som satisfierar systemet:

$\begin{pmatrix} x_1(\pi) \\ x_2(\pi) \end{pmatrix} = c_1 e^{-3\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eller

$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = c_1 e^{-3\pi} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Man får $c_1 = -\frac{7}{5} e^{3\pi}$ och $c_2 = \frac{3}{5} e^{-2\pi}$. Så den sökte lösningen är

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{7}{5} e^{3\pi} e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} e^{-2\pi} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$.

6. (i) Sök maximum och minimum av $Q(\overline{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ under bivillkoret $|\overline{x}| = 5$ och ange de $\overline{x}$ med $|\overline{x}| = 5$ på vilka minimum samt maximum av $Q(\overline{x})$ antas (2p).

Svar: Lös ekvationen $|A - \lambda E| = 0$, där $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Det finns två lösningar: $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$.
Så maxvärdet på cirkeln $|\overline{x}| = 5$ är $4 \cdot 5^2 = 100$ och minvärdet på cirkeln $|\overline{x}| = 5$ är $2 \cdot 5^2 = 50$.
Var de antas?
Finn egenvektorer av längd 5 för egenvärdena:
$\pm\frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $\lambda_1 = 2$
$\pm\frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $\lambda_2 = 4$.
Så minvärdet 50 antas på vektorerna $\pm\frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och maxvärdet 100 antas på vektorerna $\pm\frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Ange formens karaktär (1p).
Svar: positivt definit ty $\lambda_{min} = 2 > 0$.