LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2018-04-04 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Visa att punkterna $A(1, -1, 3)$, $B(1, 0, 5)$, $C(2, 1, -1)$ inte ligger på samma rät linje (1p).
   Svar: Obs att vektorerna $\overline{AB}$ och $\overline{AC}$ inte är parallella.

   (ii) Finn arean av triangeln ΔABC (1p).
   Svar: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{69}$

   (iii) I vilken punkt möts alla triangelns höjder (1p).
   Svar: I punkten $(\frac{37}{67}, \frac{-361}{67}, \frac{147}{67})$

2. Finn determinanten av matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

   Svar: -250

3. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad (2p)$$

   Kontrollera svaret.
   Svar: $\overline{x^*} = (\frac{121}{125}, \frac{-36}{125})$

   (ii) Låt $\overline{k_1}$ och $\overline{k_2}$ vara kolonnerna på matrisen A. Kan vektorn $\overline{b}$ uttryckas som en linjärkombination av $\overline{k_1}$ och $\overline{k_2}$? Motivera svaret. (1p).
   Svar: Nej, använd Gausselimination

Vänd !

4. Låt A vara en (3×3) matris. Vektorerna $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\overline{p_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till A med egenvärdena $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 1$ resp.

   (i) Visa att vektorerna bildar en bas för rummet R^3 (1p).
   Svar: Beräkna $\det[\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}]$ och notera att denna inte är lika med noll.

   (ii) Finn en matris B s. a. $B^3 = A$. (2p).
   Svar: $\begin{pmatrix} -4 & -14 & -2 \\ 3 & 9 & 1 \\ -6 & -14 & 0 \end{pmatrix}$

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ x_2' = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2. \end{cases} \qquad (2\text{p})$$

   Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\frac{2}{3}\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$ (1p)

   var: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -3 \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. (a) (i) Avgör om vektorerna $\overline{a} = (-2, 6, 1), \overline{b} = (2, 3, -1), \overline{c} = (1, 7, 2)$ är linjärt oberoende eller ej (1p).
   Svar: Beräkna $\det[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]$ och notera att denna inte är lika med noll.

   (ii) Låt A vara en kvadratisk matris och $A^3 + 5A^2 - 3A + 7E = O$, där E är enhetsmatrisen och O är nollmatrisen av samma typ som A. Uttryck inversen till A som en summa av potenser av A och matrisen E med vissa reella koefficienter (1p).
   Svar: $A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot A^2 - \frac{5}{7} \cdot A + \frac{3}{7} \cdot E$.

   (iii) Antag att en kvadratisk form $Q(x_1, x_2)$ har största värdet 3 och minsta värdet -2 på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 5$. Vilka egenvärde har den symmetriska matris A som svarar mot Q? (1p).
   Svar: $\lambda_1 = \frac{3}{5}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{5}$

Lycka till !