LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2018-08-28 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Visa att punkterna $A(2,1,-1)$, $B(1,0,5)$, $C(1,-1,3)$ och $D(0,-3,4)$ inte ligger i samma plan, (1p).
   Svar: Nej. Obs att $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (8,-2,1)$ och $\overline{n} \cdot \overline{AD} = -3 \neq 0$.

   (ii) Finn arean av triangeln ΔABC (1p).
   Svar: arean är $\frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{69}$

   (iii) Vad är längden av höjden i piramiden $ABCD$ med basen ΔABC och toppen D? (1p).
   Svar: Volymen V av parallellepipeden $ABCD$ är $|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = |\overline{n} \cdot \overline{AD}| = |-3| = 3$. Notera att $V = |\overline{n}| \cdot h$, där h är höjden. Så är $h = \frac{3}{\sqrt{69}}$

2. Finn determinanten av matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

   Svar: utveckla determinanten av A längs andra kolonnen, $\det A = 314$

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (i) Anta att $\overline{k_1}$ och $\overline{k_2}$ är kolonnerna på matrisen A. Kan vektorn $\overline{b}$ uttryckas som en linjärkombination av $\overline{k_1}$ och $\overline{k_2}$? Motivera svaret. (1p).
   Svar: Nej. Använd Gausselimination till systemet $AX = \overline{b}$ och visa att det finns inga lösningar.

(ii) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$ (2p)

Svar: Lös normalekvationerna: $A^tAX = A^t\overline{b}$. Man får $\overline{x^*} = (-\frac{32}{125}, \frac{87}{125})$. Gör en kontroll av svaret genom insättning i normalekvationerna.

4. Låt A vara en (3×3) matris. Vektorerna $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $\overline{p_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till A med egenvärdena $\lambda_1 = -32$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ resp.

(i) Visa att vektorerna $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}$ är linjärt oberoende (1p).

Svar: beräkna determinanten av $P = [\overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{p_3}] = -2 \neq 0$

(ii) Finn en matris B s. a. $B^5 = A$. (2p).

Svar: Obs $A = PDP^{-1}$, där $D = \begin{pmatrix} -32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sätt $B = PD_1P^{-1}$, där $D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ och notera att $A = B^5$.

Sedan beräkna $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 16 & 44 & 5 \\ -3 & -9 & -1 \\ -30 & -76 & -9 \end{pmatrix}$

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 5x_2. \qquad \text{(2p)} \end{cases}$$

Svar: Finn egenvärde till matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$. Fortsätt med egenvektorer: $\overline{p}_1 = (-3, 2)$ och $\overline{p}_2 = (1, 1)$. Den alllmänna lösningen är $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1e^{2t}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där c_1, c_2 är godtyckliga reella tal och $t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(\sqrt{3}) = 2$, $x_2(\sqrt{3}) = 1$ (1p)

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}e^{2(t-\sqrt{3})}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}e^{7(t-\sqrt{3})}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, där $t \in R$

6. (a) (i) Låt A vara en kvadratisk matris och $A^5 + 3A^3 - 2A^2 + 4E = O$, där E är enhetsmatrisen och O är nollmatrisen av samma typ som A. Uttryck inversen till A^2 som en summa av potenser av A och matrisen E med vissa reella koefficienter (1p).

Svar: Notera att $A^2(A^3 + 3A - 2E) = -4E$ eller $A^2((-\frac{1}{4})(A^3 + 3A - 2E)) = E$. Det medför att inversen till A^2 är $(-\frac{1}{4})(A^3 + 3A - 2E)$

(ii) Antag att en kvadratisk form $Q(x_1, x_2)$ har största värdet 5 och minsta värdet -7 på cirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 2$. Vilka egenvärde har den symmetriska matris A som svarar mot Q? (1p).

Svar: $\lambda_1 = -\frac{7}{2}$ och $\lambda_2 = \frac{5}{2}$

(iii) Visa att om A är en ON-matris så är även A^5 en ON-matris (1p)

Svar: Obs A är en ON matris omm $AA^t = E$. Vi ska kolla $A^5(A^5)^t = AAAA(AA^t)A^tA^tA^tA^t = AAAA(E)A^tA^tA^tA^t = AAAAA^tA^tA^tA^t = \ldots = E$. Så är A^5 en ON matris