LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

# TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2019-01-18 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng $\leq 15$ ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng $\geq 16$ får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. I planet med ett ortonormerat koordinatsystem betraktar man fyra punkter $A, B, C, D$ sådana att

   (i) $A(2,3)$, $D(4,1)$,

   (ii) om man roterar planet med vinkeln $\frac{\pi}{4}$ (moturs) kring punkten $D$ övergår punkten $A$ till punkten $B$:s position,

   (iii) punkten $C$ är spegelbilden av punkten $B$ i den räta linje som går genom punkterna $A$ och $D$.

   Finn koordinaterna för $B$ ( 1 p ) och $C$ ( 1 p ) samt arean av fyrahörningen $ABCD$ ( 1 p ).

   Svar: Obs $\overline{OB} = \overline{OD} + \overline{DB}$, $\overline{DA} = A - D = (2,3) - (4,1) = (-2,2)$ och $\overline{DB} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Så är $B = (4,1) - 2\sqrt{2}(1,0) = (4 - 2\sqrt{2}, 1)$.

   Obs $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC}$ och $\overline{DC} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en rotation med vinkeln $-\frac{\pi}{4}$).
   Så är $C = (4,1) + 2\sqrt{2}(0,1) = (4, 1 + 2\sqrt{2})$.
   Obs $AD = |\overline{AD}| = 2\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$, $BC = 2 \cdot \frac{AD}{\sqrt{2}} = 4$ och arean av fyrahörningen $ABCD = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 4\sqrt{2}$

2. Låt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})$ till basen $\mathcal{G} = (\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3})$ d v s $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot T$.

(i) Finn övergångsmatrisen $S$ från basen $\mathcal{G}$ till basen $\mathcal{F}$ (repetera att $S = T^{-1}$ och $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cdot S$) (1p)
Svar: Starta med matrisen $(T|E)$ och transformera denna till matrisen $(E|T^{-1})$(använd tillåtna radoperationer).
Man får $T^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
Kontrollera svaret genom att multiplicera $T$ med $S$ (1p)
Svar: $T \cdot T^{-1} = E$.

(ii) Uttryck vektorn $\overline{x} = -2\overline{f_1} + 5\overline{f_2} + 4\overline{f_3}$ i basen $\mathcal{G}$. (1p)
Svar: Obs $\overline{x} = \mathcal{F} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathcal{G} \cdot T^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathcal{G} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 10 & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} =$
$\mathcal{G} \begin{pmatrix} 48 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = 48\overline{g_1} + 20\overline{g_2} + 5\overline{g_3}$.

3. Finn determinanten av matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Svar: $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 9 & -6 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 11 \\ 1 & 9 & -6 \end{pmatrix} =$
$-\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -25 & -23 & 11 \\ 19 & 21 & -6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 19 & 21 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 23 \\ -2 & 21 \end{pmatrix} =$
$42 + 46 = 88$.

4. Visa att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

saknar lösningar (1p) och finn sedan minsta kvadratlösningen $\overline{x^*}$ till systemet (glöm ej att kontrollera svaret) (2p).

Svar: (i) Använd Gausselimination för att visa att systemet saknar lösningar.

(ii) Betrakta normalekvationerna: $A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}$.

Beräkna $A^t A = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 8 \\ -7 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ och $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lös normalekvationerna. Minsta kvadratlösningen är

$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2} - 2t, -\frac{1}{2} - 2t, t), t \in R$

5. Betrakta kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$ i variablerna $x_1, x_2$.

   (i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där $P$ är en ON-matris, som transformerar formen $Q$ till ett nytt utryck i variablerna $y_1, y_2$ utan termen $y_1y_2$ (1p).

   Svar: Obs $Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)A(x_1, x_2)^t$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.
   Egenvärde: lös ekv $|A - \lambda E| = 0$ och få fram $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -4$.
   En ON-bas av egenvektorer: til ex. $\overline{p_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_1 = 6$) och $\overline{p_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_2 = -4$). Sätt matrisen $P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Så är $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

   (ii) Få fram det nya uttrycket för $Q$ (i variablerna $y_1, y_2$) genom direkt insättningen av substitutionen från (i) i $Q$ istället för variablerna $x_1, x_2$ (1p).

   Svar: Teorin säger att $Q(y_1, y_2) = 6y_1^2 - 4y_2^2$. Vi ska kontrollera detta genom direkt insättning av substitutionen från (i) i $Q$ istället för variablerna $x_1, x_2$.
   Obs $x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3y_1 - y_2), x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(y_1 + 3y_2)$.
   Fortsätt $Q = 5(\frac{1}{\sqrt{10}}(3y_1 - y_2))^2 + 6(\frac{1}{\sqrt{10}}(3y_1 - y_2))(\frac{1}{\sqrt{10}}(y_1 + 3y_2)) - 3(\frac{1}{\sqrt{10}}(y_1 + 3y_2))^2 = \ldots = 6y_1^2 - 4y_2^2$.

   (iii) Avgör formens karaktär (1p).

   Svar: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 6 \cdot (-4) = -24 < 0$. Så är $Q$ indefinit.

6. Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet $X' = A \cdot X$,

där $A = B^5$ och $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Tips: Tänk först, handla sedan.

Svar: Obs ett samband mellan egenvärdena och egenvektorer hos matriserna $A$ och $B$.

Låt $\overline{v}$ vara en egenvektor till $B$ med egenvärde $\lambda$ d v s $B\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

Uttryck $A\overline{v} = B^5\overline{v} = B^4(B\overline{v}) = B^4\lambda\overline{v} = \lambda B^4\overline{v} = \ldots = \lambda^5\overline{v}$.

Notera att $\overline{v}$ är en egenvektor till $A$ med egenvärde $\lambda^5$.

Finn egenvärdena till $B$ och en bas för $R^2$ bestående av egenvektorer till $B$.

Handla som vanligt.

$|B - \lambda E| = 0$. Vi får egenvärdena: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$, och en bas av egenvektorer till $B$: till ex. $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_1 = 2$) och $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_2 = 7$).

Ur resonemanget ovan får vi en bas för $R^2$ bestående av egenvektorer till $A$: $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_1 = 2^5$) och $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (svarar mot $\lambda_2 = 7^5$).

Så är den allmänna lsgen

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2^5 t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{7^5 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R$$