LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2019-04-24 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. I planet med ett ortonormerat koordinatsystem betraktar man fyra punkter O, A, B, C sådana att

   (i) $A(2,3)$, $O(4,1)$,

   (ii) om man roterar vektor $\overline{OA}$ med vinkeln $\frac{\pi}{3}$ (respekterat, $\frac{2\pi}{3}$) moturs kring punkten O övergår punkten A till punkten B:s (respekterat, C:s) position.

   Finn koordinaterna för punkterna B, C (2 p) samt arean av fyrahörningen $OABC$ (1 p).

   Svar: Obs $\overline{OA} = A - O = (2,3) - (4,1) = (-2,2)$ och $|\overline{OA}| = \sqrt{8}$.

   $\overline{OB} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$. Så är $B = O + \overline{OB} = (4,1) + (-1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}) = (3-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$.

   $\overline{OC} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$. Så är $C = O + \overline{OC} = (4,1) + (1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}) = (5-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

   Arean av fyrahörningen $OABC = 2\cdot$ arean av triangeln $OAB = 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

   Så är $B = (3-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$, $C = (5-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, arean av $OABC$ är $4\sqrt{3}$.

2. (i) Finn avbildningsmatrisen A för ortogonala projektionen på planet $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ (2p).

Svar: Obs $\overline{n} = (2, 1, -2)$ är en normalvektor till planet och $|\overline{n}| = 3$. Låt O vara origo (den hör till planet), $\overline{OP} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\overline{OS}$ den ortogonala projektionen av $\overline{OP}$ på planet. Så är $\overline{OS} = \overline{OP} - \text{proj}_{\overline{n}}\overline{OP} = \overline{OP} - \frac{\overline{n}\cdot\overline{OP}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{9} \cdot (2x_2 + x_2 - 2x_3) \cdot (2, 1, -2) = \frac{1}{9} \cdot (5x_1 - 2x_2 + 4x_3, -2x_1 + 8x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 5x_3)$.

Så är $A = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(ii) Ange en ON-bas $\mathcal{B}$ för rummet R^3 bestående av egenvektorer till A (1p).

Svar: Obs $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ är egenvärden för A. Egenvektorer som svarar mot λ_1 är $t \cdot \overline{n}, t \neq 0$. Egenvektorer som svarar mot λ_2 är alla icke-triviala vektorer som är vinkelräta mot $\overline{n}$. Välj till ex. $\overline{e_1} = \frac{1}{|\overline{n}|} \cdot \overline{n} = \frac{1}{3} \cdot (2, 1, -2)$, $\overline{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1)$ och $\overline{e_3} = \overline{e_1} \times \overline{e_2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot (1, -4, -1)$ som en ON-bas för R^3.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Finn inversen till matrisen A och sedan lös ekvationen $C = AX + B$.

Svar: Obs $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(använd till ex. matrisen $[A|E]$ och tillåtna rad operationer, glöm ej kontrollen: $A \cdot A^{-1} = E$).

Föt att bestämma X notera att $A \cdot X = C - B$ och $X = A^{-1} \cdot (C - B)$ (Obs ordningen i produkten!).

Efter subtraktionen och multiplikationen får man $X = \begin{pmatrix} 12 & -20 & 33 \\ -2 & 4 & -6 \\ -9 & 15 & -25 \end{pmatrix}$.

4. (i) Bestäm den räta linje $y = kx + b$ som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

x_i :	0	1	2	3	(2p)
y_i :	2	6	2	8	

Svar: Skriv om villkoret som ett system $A \cdot X = Y$ (*), där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} \text{ och } Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Lös (*) med minstakvadratmetoden:

$(A^t \cdot A) \cdot X = A^t \cdot Y$ (normalekvationerna) (**), $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$,

$A^t \cdot Y = \begin{pmatrix} 34 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Lös (**) (använd Gausselimination). Man får $k = \frac{7}{5}$ och $b = \frac{12}{5}$.

Så är $\quad y = \frac{7}{5} \cdot x + \frac{12}{5} \quad$ den sökte linjen.

(ii) Rita figur med *punkterna* och *linjen.* (1p).

Svar: Rita !

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad \text{(2p).}$$

Svar: Skriv om systemet på matrisform: $X' = A \cdot X$, där

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ och $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Fortsätt med ekv $|A - \lambda \cdot E| = 0$. Det finns två rötter: $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -2$.

Finn en egenvektor motsvarande λ_1: till ex. $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och

en egenvektor motsvarande λ_2: till ex. $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{7t} \cdot \overline{p_1} + c_2 \cdot e^{-2t} \cdot \overline{p_2}, \quad c_1, c_2 \in R \text{ and } t \in R.$$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = -3, \; x_2(1) = 2$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{7}{9} \cdot e^{7(t-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9} \cdot e^{-2(t-1)} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Gärna kontrollera: $\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = -\frac{7}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. (i) Lös ekvationen $\det A(k) = 0$ med avseende på k, där

$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 8 & 4 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad (2p).$$

Svar: Obs $\det A(k) = -k^2 - 8k + 48$ (till ex. utveckla determinanten efter 1:a raden). Ekv $\det A(k) = 0$ har två rötter: $k_1 = -12, k_2 = 4$. Den minsta av dem är -12.

(ii) Bestäm dimensionen av nollrummet för matrisen $A(k)$, där k är den minsta av lösningarna (1p).

Svar: Obs $A(-12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -12 & 8 & 4 \\ 2 & -12 & 2 \end{pmatrix}$. Lös ekv:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -12 & 8 & 4 \\ 2 & -12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (använd Gausselimination).

Man får 1-parameterlösning: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R.$

Så är dimensionen av av nollrummet för matrisen $A(-12)$ lika med 1.