LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2019-08-27 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Bestäm ekv för det plan som går genom punkten $A(1,2,3)$ och aŕ vinkelrät mot linjen $L: x = 3+t, y = 2+3t, z = 1-5t$ (1p).
   Svar: $x + 3y - 5z + 8 = 0$

   (ii) Finn skärningspunkten B av linjen och planet (1p).
   Svar: $B(\frac{93}{35}, \frac{34}{35}, \frac{95}{35})$

   (iii) Bestäm avståndet mellan punkterna A och B (1p).
   Svar: $\frac{2}{35} \cdot \sqrt{1190}$

2. (i) Bestäm avbildningsmatrisen A för speglingen i planet $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ (2p)
   Svar: $A = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

   (ii) Finn vektorn $A^{2019} \cdot \overline{v}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (1p).

   Svar: $\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \\ 19 \end{pmatrix}$

3. Lös ekv $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Svar: $X = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$

4. (i) Bestäm ekvationen för den räta linje ($y = kx + b$) som bäst approx-

imerar följande data i minstakvadratmening

$$\begin{array}{rcccc} x: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y: & 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \qquad (2p)$$

Svar: $y = \frac{2}{5}x + \frac{19}{10}$

(ii) Rita figur med punkterna och linjen (1p).

Svar: I x, y-planet ange punkterna och rita linjen ovan

5. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 8x_1 + x_2 \end{cases} \qquad (2\text{p}).$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, c_1, c_2, t \in R$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = -3,\ x_2(1) = 2$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -e^{5(t-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot e^{-3t(t-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in R$

6. (i) Avgör karaktär av den här kvadratiska formen $Q(\overline{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ (1p).

Svar: idefinit.

(ii) Sök maximum och minimum av $Q(\overline{x})$ under bivillkoret $|\overline{x}| = 2$ (1p).

Svar: $\max = 12, \min = -4$

(iii) Ange de $\overline{x}$ på vilka restriktionen av Q på cirkeln $|\overline{x}| = 2$ antar största värde. (1p)

Svar: $\pm\sqrt{2} \cdot (1, 1)$