LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2020-01-18 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Bestäm ekv för det plan som går genom punkterna $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$ och $C(0,2,5)$ (1p).
   Svar: $2x-3y+z+1=0$

   (ii) Finn cos av vinkeln B i triangeln $\Delta\ ABC$ (1p).
   Svar: $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{3}$

   (iii) Vad är avståndet mellan punkten B och den linje som går genom punkterna A och C (1p).
   Svar: $\sqrt{\frac{14}{5}}$

2. Låt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{F} = (\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})$ till basen $\mathcal{G} = (\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3})$ d v s $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot T$.

   (i) Finn övergångsmatrisen S från basen $\mathcal{G}$ till basen $\mathcal{F}$ (s. a. $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cdot S$). (1p)
   Tips. Repetera att $S = T^{-1}$.
   Svar: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   (ii) Kontrollera svaret i (i) genom att beräkna produkten $T \cdot S$. (1p)
   Svar: $T \cdot S = E$

   (iii) Uttryck vektorn $\overline{x} = 4\overline{f_1} + 5\overline{f_2} + 2\overline{f_3}$ i basen $\mathcal{G}$. (1p)
   Svar: $\overline{x} = 49\overline{g_1} + 62\overline{g_2} + \frac{45}{2}\overline{g_3}$

3. (i) Visa att systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

saknar lösningar (1p).

Svar: Till ex. använd Gausselimination.

(ii) Bestäm minsta kvadratlösningen $\overline{x}^*$ till systemet $A\overline{x} = \overline{b}$ (2p).

Svar: $x_1 = \frac{24}{25}$ och $x_2 = -\frac{9}{25}$

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, t \in R$.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = -2$, $x_2(1) = 3$ (1p).

Svar: **Svar:** $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{10}{3} e^{-2t+2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} e^{t-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$**,** $t \in R$**.**

5. Betrakta ekvationen $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 3$.

(i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar den här ekvationen till en ny ekvation i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2. (1p).

Svar: till ex. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(ii) Få fram den nya ekvationen i variablerna y_1, y_2 genom direkt insättningen av den här substitutionen i den givna ekvationen. Vad är det för en kurva? (1p).

Svar: Om man sätter in HL av (i) i ekv får man ekv $3y_1^2 + 8y_2^2 = 3$ som är en ekv för en ellips.

(iii) Avgör karaktär av den här kvadratiska formen $Q(\overline{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2$. (1p)

Svar: formen är positivt definit, ty minsta egenvärdet är positivt.

6. Gäller följande påståenden? Bevis eller motexempel.

(i) $\det((A+B)^2) = (\det A + \det B)^2$, där A och B är godtyckliga (3×3)-matriser s. a. $AB = BA$ (1p).

Svar: Nej. Sätt $A = B = E$. Obs $AB = BA$. Sedan $VL = \det(4E) = 64$. $HL = (1+1)^2 = 4$. Obs $4 \neq 64$.

(ii) Låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ vara egenvektorer för en kvadratisk matris A med egenvärdena λ_1 och λ_2 respekterat. Om $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så är vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ linjärt oberoende (1p).

Svar. Ja. Sätt ekv $x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 = \overline{0}$. $(*)$ m a p x_1 och x_2. Fortsätt $A(VL) = x_1\lambda_1\overline{v}_1 + x_2\lambda_2\overline{v}_2$ och $A(HL) = A(\overline{0}) = \overline{0}$. Vi får $x_1\lambda_1\overline{v}_1 + x_2\lambda_2\overline{v}_2 = \overline{0}$. $(**)$

Multiplicera $(*)$ med λ_1. Vi får $x_1\lambda_1\overline{v}_1 + x_2\lambda_1\overline{v}_2 = \overline{0}$. $(***)$

Subtrahera $(**) - (***)$. Man får $x_2(\lambda_2 - \lambda_1)\overline{v}_2 = \overline{0}$. Det medför att $x_2 = 0$ ty $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ och $\overline{v}_2 \neq \overline{0}$. Sätt in $x_2 = 0$ i ekv $(*)$ och sedan få fram $x_1 = 0$. VHV

(iii) Låt $f(\overline{u}, \overline{v}) = u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1$, där $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är godtyckliga vektorer i vektorrummet R^3. Då är funktionen f en godkänd skalärprodukt på R^3 (1p).

Svar: Nej. Kolla definitionen av skalärprodukten (4 axiom).

Obs $f(\overline{u}, \overline{v}) \neq f(\overline{v}, \overline{u})$.

Till ex. sätt $\overline{u} = (1,0,0)$, $\overline{v} = (0,1,0)$. Då är $f(\overline{u}, \overline{v}) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$ och $f(\overline{v}, \overline{u}) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Man kan också hänvisa till $f(\overline{u}, \overline{u}) = 0$ då $\overline{u} = (1,0,0) \neq \overline{0}$.