Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2020-03-17 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta pyramiden $OABC$ i rummet R^3 med $O(0,0,0)$, $A(3,4,5)$, $B(-4,5,8)$ och $C(2,1,-4)$.

   (i) Finn ekv för planet ABC (1p).
   Svar: Finn en normal (en vektor) till planet ABC:
   $\overline{AB} = B - A = (-7,1,3)$ och $\overline{AC} = C - A = (-1,-3,-9)$.
   $\overline{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (0,-66,22) = 22 \cdot (0,-3,1)$.
   Planets ekv:
   $0x - 3y + z + D = 0$, finn D och få fram $3y - z - 7 = 0$

   (ii) En normal(en rät linje) till planet ABC går genom punkten O.
   I vilken punkt P skär denna normal planet? (1p).
   Svar: Normalens ekv: $x = 0, y = 3t, z = -t, t \in R$.
   Sätt in denna i planets ekv och finn $t = \frac{7}{10}$.
   Normalens ekv och värdet ger
   $P(0, \frac{21}{10}, -\frac{7}{10})$

   (iii) Finn avståndet från P till B (1p).
   Svar: Avståndet är $|\overline{PB}| = |(-4, \frac{29}{10}, \frac{87}{10})| = \frac{1}{10}\sqrt{40^2 + 29^2 + 87^2} = \frac{1}{10}\sqrt{1600 + 841 + 7569} = \frac{1}{10}\sqrt{10010}$

2. (i) Kontrollera att vektorerna $\overline{a} = (2,3,-1), \overline{b} = (0,2,1), \overline{c} = (3,1,-2)$ bildar en bas $\mathcal{B}$ i rummet R^3 (1p).
   Svar: Obs att $\det(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 5 \neq 0$. Detta medför att vektorerna bildar en bas i rummet.

   (ii) Finn koordinaterna av vektorn $\overline{d} = (3,5,8)$ i basen $\mathcal{B}$ (1p).
   Svar: Lös ekv: $x_1\overline{a} + x_2\overline{b} + x_3\overline{c} = \overline{d}$. Skriv om ekvationen som ett system och använd Gauss elimination:
   koordinaterna för $\overline{d}$ i basen är $-\frac{48}{5}, \frac{66}{5}, \frac{37}{5}$

(iii) Är vektorerna $\overline{a}, 2\overline{b}, 3\overline{c}, 4\overline{d}$ linjärt oberoende? Motivera svaret. (1p).

Svar: Nej, till ex. 4 vektorer i tre-dimensionellt rum alltid linjärt beroende.

Eller obs att $x_1\overline{a} + \frac{x_2}{2}(2\overline{b}) + \frac{x_3}{3}(3\overline{c}) + (-\frac{1}{4})(4\overline{d}) = \overline{0}$, $-\frac{1}{4} \neq 0$ och hänvisa till definitionen.

3. (i) Bestäm ekvationen för den räta linje ($y = kx + b$) som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$$\begin{array}{cccccc} x: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y: & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \qquad (2p)$$

Svar: Obs att linjens ekv är $y = kx + b$, där (k, b) är en lösning till ekv $A^tAX = A^tB$ med $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$y = -\frac{1}{10}x + \frac{8}{5}$.

(ii) Rita figur med punkterna och linjen (1p).

Svar: Rita!

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 7x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Svar: Inför matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Finn lösningar till ekv: $|A - \lambda E| = 0$ eller $\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$. Man får $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 8$.

Obs att $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor för egenvärdet λ_1 och

$\overline{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en egenvektor för egenvärdet λ_2.

Så är alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1e^{3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{8t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, t \in R.$$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(3) = 4$, $x_2(3) = -5$ (1p). Svar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{13}{5}e^{3(t-3)}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5}e^{8(t-3)}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in R.$$

5. Låt $F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 3$.

   (i) Bestäm en symmetrisk matris A sådan att $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x}$, där $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (1p).

   Svar: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

   (ii) Med hjälp av A finn största och minsta värde av F då $|\overline{x}| = 3$ (1p).

   Svar: Egenvärden till A är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 7$.

   Så är minsta och största värde av F då $|\overline{x}| = 3$ resp.

   $\min_{|\overline{x}|=3} F = 3 \cdot 3^2 + 3 = 30$ och $\max_{|\overline{x}|=3} F = 7 \cdot 3^2 + 3 = 66$.

   (iii) Finn en matris B sådan att $A = B^5$ (1p).

   Obs att $\overline{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor för egenvärdet λ_1 och

   $\overline{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor för egenvärdet λ_2.

   Normera vektorerna: $\overline{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\overline{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Notera att $A = PDP^t$, där $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

   Sätt $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt[5]{3} & 0 \\ 0 & \sqrt[5]{7} \end{pmatrix}$ och $B = PD_1P^t$.

   Obs att $D_1^5 = D$ och $B^5 = A$.

   Beräkna $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[5]{3} & 0 \\ 0 & \sqrt[5]{7} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

   $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{7}) & (-\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{7}) \\ (-\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{7}) & (\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{7}) \end{pmatrix}$

6. Gäller följande påståenden? Bevis eller motexempel.

   (i) Låt A vara en kvadratisk (3×3)-matris med $\det A$ som satisfierar ekv: $x^2 - 3x + 2 = 0$. Då är A inverterbar. (1p).

   Svar: Obs att ekvationen $x^2 - 3x + 2 = 0$ har rötter 1 och 2.

   Om $\det A$ är 1 eller 2 så är $\det A \neq 0$. Detta medför att A^{-1} existerar.

(ii) Låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ vara egenvektorer för en kvadratisk symmetrisk (3×3)-matris A med egenvärdena λ_1 och λ_2 respekterat och $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Då är vektorerna $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ ortogonala. (1p).

Svar: Vi har $A\overline{v}_1 = \lambda_1 \overline{v}_1$ och $A\overline{v}_2 = \lambda_1 \overline{v}_2$.

Notera att $A\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \lambda_1 \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \lambda_1(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2)$ (skalärprodukter), $A\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_1^t (A^t \overline{v}_2) = \overline{v}_1^t (A\overline{v}_2)$ (produkter av matriser)
$= \overline{v}_1 \cdot (\lambda_2 \overline{v}_2) = \lambda_2(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2)$ (skalärprodukter).

Därför att $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vi får att $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = 0$.

(iii) Låt $f(\overline{u}, \overline{v}) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$, där $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är godtyckliga vektorer i vektorrummet R^3. Då är funktionen f en godkänd skalärprodukt på R^3 (1p).

Svar: Kontrollera axiomen:

(1) $f(\overline{u}, \overline{v}) = f(\overline{v}, \overline{u})$

(2) $f(\overline{u} + \overline{v}, \overline{w}) = f(\overline{u}, \overline{w}) + f(\overline{v}, \overline{w})$

(3) $f(\lambda \cdot \overline{u}, \overline{v}) = \lambda \cdot f(\overline{v}, \overline{u})$

(4) $f(\overline{u}, \overline{u}) \geq 0$ och $f(\overline{u}, \overline{u}) = 0$ omm $\overline{u} = \overline{0}$