Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2020-08-25 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Finn arean av triangen ΔABC med $A(2,1,-4), B(3,4,5), C(-4,5,8)$ (1p).
   Svar: $11\sqrt{10}$

   (ii) Finn ekv på parameter form för den rätta linje L som går genom punkten $P(-3,7,4)$ och är vinkelrätt mot planet av triangen ΔABC (1p).
   Svar: $x=-3, y=7-3t, z=4+t,\ t\in R$

   (iii) Finn volymen av pyramiden $ABCP$ (1p).
   (Obs Volymen av en pyramid är lika med $\frac{1}{3}\cdot S\cdot h$, där S är arean av basen och h är höjden)
   Svar: $\frac{110}{3}$

2. Låt $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

   (i) Finn determinanten av A.
   Svar: 2

   (ii) Bestäm inversen A^{-1} till A (1p).
   Svar: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & 10 & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (iii) Gör kontroll av A^{-1} (1p).
   Svar: $A\cdot A^{-1}=E$

3. (i) Kontrollera att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

saknar lsgar (1p).

Svar: Gausselimination

(ii) Bestäm minsta kvadratlösningen till systemet (2p).

Svar: $\frac{2}{5}(2, 1)$

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 5x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$ och $c_1, c_2 \in R$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(3) = 2,\ x_2(3) = -3$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -e^{2(t-3)} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{7(t-3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$

5. Låt $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 14x_1x_2 + 3x_2^2 + 1$.

(i) Bestäm en symmetrisk matris A sådan att $3x_1^2 + 14x_1x_2 + 3x_2^2 = \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x}$, där $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) Med hjälp av A finn största och minsta värde av F då $|\overline{x}| = 2$ (1p).

Svar: max $= 41$ och min $= -15$

(iii) Finn matrisen $B = A^{25}$ (1p).

Svar: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (10^{25} - 4^{25}) & (10^{25} + 4^{25}) \\ (10^{25} + 4^{25}) & (10^{25} - 4^{25}) \end{pmatrix}$

6. (i) Kontrollera att vektorerna $\overline{a} = (2, 3, -1), \overline{b} = (0, 2, 1), \overline{c} = (5, 1, -2)$ bildar en bas $\mathcal{B}$ i rummet R^3 (1p).

Svar: Obs $\det(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 15 \neq 0$

(ii) Finn koordinaterna av vektorn $\overline{d} = (9, 13, -1)$ i basen $\mathcal{B}$ (1p).
Svar: $2, 3, 1$

(iii) Är vektorerna $\overline{a}$, $\overline{a}+2\overline{b}$ och $\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$ linjärt oberoende? Motivera svaret. (1p).
Svar: Obs $\det(\overline{a}, \overline{a}+\overline{b}, \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = 90 \neq 0$