Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2021-01-13 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ är avbildningsmatrisen för ortogonala projektionen på planet π som går genom origo. Bestäm planets ekvation. (1p).

Svar: Vi ska bestämma en normalvektor till planet. Till ex. man kan lösa ekv $AX = O$, där O är en (3×1) nollmatris. Använd Gausselimination och få fram $X = t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$. Välj vektor $\overline{n} = (2, 2, 1)$ som en normalvektor till planet. Planets ekv är $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

(ii) Finn ekv på parameter form för den rätta linje L som går genom punkten $P(1, 1, 1)$ och är vinkelrätt mot planet π (1p).

Svar: Observera att vektorn $\overline{n}$ från (i) är en riktningsvektor för linjen L. Så är linjens ekv på parameterform följande: $\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}, t \in R.$

(iii) På linjen L ligger spegelbilden Q av punkten P i planet π. Finn cos av vinkeln POQ, där O är origo. (1p).

Svar: Finn Q. Observera att $Q = P + \overline{PQ}$ och $\overline{PQ} = -2pr_{\overline{n}}\overline{OP}$.
Beräkna $\overline{PQ} = -2\frac{\overline{OP}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = -\frac{10}{9}(2, 2, 1)$ och
$Q = (1, 1, 1) - \frac{10}{9}(2, 2, 1) = -\frac{1}{9}(11, 11, 1)$.
Notera att $\cos POQ = \frac{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}{|\overline{OP}||\overline{OQ}|}$.
Beräkna $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = (1, 1, 1) \cdot (-\frac{1}{9}(11, 11, 1)) = -\frac{1}{9}(11 + 11 + 1) = -\frac{23}{9}$.

$|\overline{OP}| = \sqrt{3}$ och $|\overline{OQ}| = \frac{1}{9}\sqrt{121+121+1} = \sqrt{3}$.
Nu får man $\cos POQ = -\frac{23}{27}$.

2. Låt $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) Finn determinanten av B (2p)

Svar: Till ex. utveckla determinanten efter 2:a kolonnen och få $\det B = 112$ (lite bättre om man först skapar nollor i positionerna $(1,2)$ och $(3,2)$ och sedan använder utvecklingen).

(ii) Bestäm nollrummet till B (1p).

Svar: Vi ska lösa ekv $BX = O$ (*), där O är en (4×1) nollmatris. Repetera att $\det B = 112 \neq 0$ så har systemet (*) endast en lösning $\overline{x} = \overline{0}$ som utgör nollrummet till B.

3. (i) Kontrollera att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

saknar lsgar (1p).

Svar: Använd Gausselimination.

(ii) Bestäm minsta kvadratlösningen till systemet.
Gör kontroll (2p).

Svar: Vi ska lösa ekv $A^tA\overline{x} = A^t\overline{x}$ $(*)$.

Notera att $A^tA = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ och $A^t\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Använd Gausselimination för att lösa (*). Vi får $\overline{x} = \frac{1}{125}(24, 91)$.
Gärna kontrollera svaret.

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2 \\ x_2' = -x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad (2p).$$

Svar: Använd matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ och lös ekv $|A - \lambda E| = 0$.

Denna har två rötter: $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 1$.

Observera att vektorn $\overline{p_1} = (-1, 1)$ är en egenvektor till A som svarar mot λ_1 och vektorn $\overline{p_2} = (-4, 1)$ är en egenvektor till A som svarar mot λ_2.

Nu får vi beskriva den allmänna lösningen:

$\overline{x}(t) = c_1 e^{-2t}\overline{p_1} + c_2 e^t \overline{p_2}, t \in R$, och c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(2) = -2$, $x_2(2) = 5$ (1p).

Svar: $\overline{x}(t) = 6e^{-2(t-2)}\overline{p_1} - e^{t-2}\overline{p_2}, t \in R$

5. Låt $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 5$.

(i) Bestäm en symmetrisk matris A sådan att kvadratiska delen Q av F är lika med $\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x}$, där $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (1p).

Svar: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) Finn största och minsta värde av F då $|\overline{x}| = 3$ samt vektorer på vilka dem antas (1p).

Svar: Finn egenvärdena för A:

$|A - \lambda E| = 0$ eller $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ eller $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 4$.

Finn motsvarande egenvektorer med längden 1:

$\overline{p_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ och $\overline{p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Då är största värde av F på cirkeln $|\overline{x}| = 3$ lika med $4 \cdot 3^2 + 5 = 41$ och detta antas på vektorerna $\pm 3\overline{p_1}$ (obs de måste ligga på cirkeln); minsta värde av F på cirkeln $|\overline{x}| = 3$ är lika med $2 \cdot 3^2 + 5 = 23$ och detta antas på vektorerna $\pm 3\overline{p_2}$ (obs de måste ligga på cirkeln).

(iii) Finn en matris B sådan att $B^3 = A$ (1p).

Svar: Observera att $A = PDP^t$, där $P = P^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (obs att P är en ON matris) och $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Välj som $B = PD_1P^t$, där $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} \end{pmatrix}$ (varför?).

Beräkna $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) & (-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \\ (-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) & (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \end{pmatrix}$.

6. Gäller följande påståenden? Bevis eller motexempel.

(i) Anta att vektorer $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ från ett vektorum V är linjärt oberoende. Då bildar även vektorerna $\overline{u} = \overline{a} + 3\overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{v} = 4\overline{b} + 5\overline{c}$ och $\overline{w} = 2\overline{a}$ ett linjärt oberoende system i V. (1p).

Svar: Observera att V är ett **godtyckligt** vektorrum. Notera att vektorerna $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ från vektorummet V är linjärt oberoende <=> ekv $x_1\overline{a} + x_2\overline{b} + x_3\overline{c} = \overline{0}$ m a p x_1, x_2, x_3 har endast en lösning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (*).

För att avgöra om vektorerna $\overline{u} = \overline{a} + 3\overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{v} = 4\overline{b} + 5\overline{c}$ och $\overline{w} = 2\overline{a}$ är linjärt oberoende eller inte användar man definitionen.

Sätt ekv $x_1\overline{u} + x_2\overline{v} + x_3\overline{w} = \overline{0}$ m a p x_1, x_2, x_3 (**).

Observera att (**) <=> $x_1(\overline{a} + 3\overline{b} - 2\overline{c}) + x_2(4\overline{b} + 5\overline{c}) + x_3(2\overline{a}) = \overline{0}$ eller $(x_1 + 2x_3)\overline{a} + (3x_1 + 4x_2)\overline{b} + (-2x_1 + 5x_2)\overline{c} = \overline{0}$ <=> (se (*)) systemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 = 0 \quad (***) \end{cases}$$

Observera att systemetsmatris A har $\det A \neq 0$. Det betyder att (***) har exakt en lösning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Samma gäller ekv (**). Nu får vi att vektorerna $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ är linjärt oberoende.

(ii) För godtyckliga $(n \times n)$-matriser A, B, C, där $n \geq 1$, gäller följande likhet: $\det(A(B + C)) = \det(AB) + \det(AC)$. (1p).

Svar: Vi ska visa att påståendet inte gäller. Det räcker med ett exempel. Låt $A = B = C = E$, där E är en (2×2) enhetsmatris. Observera att $\det(A(B + C)) = 4$ och $\det(AB) + \det(AC) = 2$. Så $VL \neq HL$.

(iii) Anta att A, B, C, är ON matriser av samma typ. Då gäller att produkten ABC är också en ON matris av samma typ. (1p).

Svar: Repetera att en kvadratisk matris M är en ON matris om $M^t = M^{-1}$. Så har vi $A^t = A^{-1}$, $B^t = B^{-1}$, $C^t = C^{-1}$. Kolla: $(ABC)(ABC)^t = AB(CC^t)B^tA^t = ABEB^tA^t = A(BB^t)A^t = AEA^t = AA^t = E$. Vi har visat att $(ABC)^t = (ABC)^{-1}$ som betyder att ABC är en ON matris.