Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2021-03-16 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta tre räta linjer i rummet:

$$L_1 = \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = 2 - t \end{cases}, \ L_2 = \begin{cases} x_1 = -2 + 3t \\ x_2 = 3 - 5t \\ x_3 = -1 + 4t \end{cases}, \ L_3 = \begin{cases} x_1 = 8 + 5t \\ x_2 = 5 + t \\ x_3 = 3 + 2t \end{cases}.$$

Linjerna L_1, L_2 har gemensamm punkt A, linjerna L_1, L_3 har gemensamm punkt B och linjerna L_2, L_3 har gemensamm punkt C.

(i) Finn punkterna A, B, C (1p).

Svar: För att hitta A först lös systemet $\begin{cases} 2 + t = -2 + 3s \\ 1 + 3t = 3 - 5s \\ 2 - t = -1 + 4s \end{cases}$,

m a p t, s. Obs $s = 1$ och $t = -1$.

Sedan använd VL och $t = -1$ eller HL och $s = 1$. Analogt med B och C.

Man får $A(1, -2, 3)$, $B(3, 4, 1)$, $C(-2, 3, -1)$.

(ii) I triangeln ΔABC bestäm $\cos A$ (1p).

Svar: Notera att $\overline{AB} = (2, 6, -2)$ och $\overline{AC} = (-3, 5, -4)$. Vidare $|\overline{AB}| = 2\sqrt{11}$, $|\overline{AC}| = 5\sqrt{2}$ och $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 32$.

Så är $\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{16}{5\sqrt{22}}$

(iii) Ange ekvationen för det plan där triangeln ΔABC ligger samt triangelns area (1p).

Svar: Notera att $\overline{AB} \times \overline{AC} = 14(-1, 1, 2)$.

Planets ekv är $x - y - 2z + 3 = 0$ och triangelns area är lika med $\frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = 7\sqrt{6}$.

2. Låt $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) Finn determinanten av B (2p)
Svar: Till ex. utveckla determinanten efter 3:e raden. Då får man $\det B = -67$.

(ii) Betrakta en linjär avbildning $f : R^4 \to R^4$ med avbildningsmatrisen B. Hur många vektorer av R^4 avbildas på vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ under avbildningen f: 0, 1 eller minst 2? Motivera svaret. (1p).
Svar: Obs att $\det B = -67 \neq 0$. Så är avbildningen f bijektiv. Det medför att bara EN vektor avbildas på vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ under avbildningen f. Obs att vektorn är lika med $B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (i) Kontrollera att det linjära systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

saknar lsgar (1p).
Svar: Använd Gausselimination.

(ii) Bestäm minsta kvadratlösningen till systemet.
Gör kontroll (2p).
Svar: Lös ekv $A^tAX = A^tB$. Obs $A^tA = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ och $A^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Minsta kvadratlösningen är lika med $\frac{1}{125} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 91 \end{pmatrix}$. Gör kontroll!

4. I x, y-planet hoppar en groda. Koordinaterna för grodas position vid tiden $t = i$ (ett helt tal) betecknas med $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$. Man kan få koor-

dinaterna för grodas nästa position vid tiden $t = i + 1$ via formeln $\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Finn koordinaterna för grodas position vid tiden $t = 20$ om vid tiden $t = 0$ var grodan i punkten med koordinaterna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Svar: Obs att A är diagonaliserbar och har egenvärdena $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 1$ och motsvarande egenvektorer (till ex.) $\overline{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Första sättet. Notera att $\begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \end{pmatrix} = A^{20} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \overline{p_1}$. Så är $\begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \end{pmatrix} = A^{20} \cdot \overline{p_1} = (-2)^{20} \cdot \overline{p_1} = 2^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Andra sättet. Notera att $A = PDP^{-1}$, där $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vidare $A^{20} = PD^{20}P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} (-2^{20} + 4) & (-4 \cdot 2^{20} + 4) \\ (2^{20} - 1) & (4 \cdot 2^{20} - 1) \end{pmatrix}.$$

Till sist får vi $\begin{pmatrix} x_{20} \\ y_{20} \end{pmatrix} = A^{20} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 2^{20} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Betrakta kvadratiska formen $Q(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$.

   (i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar formen Q till ett nytt uttryck i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2 samt det här nya uttrycket (2p).

   Svar: Formens matris $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, egenvärdena: $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = -5$, motsvarande egenvektorer (till ex.) $\overline{q_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\overline{q_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notera att $\overline{q_1}, \overline{q_2}$ är en ON bas för R^2.

Så är $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
och $Q(y_1, y_2) = 5y_1^2 - 5y_2^2$.

(ii) Rita lösningsmängden till ekv $Q(x_1, x_2) = 0$ i x_1, x_2-planet. (1p).

Svar: Obs att ekv $Q(x_1, x_2) = 0$ (*) svarar mot ekv $Q(y_1, y_2) = 0$ (**) i y_1, y_2-planet. Lösningsmängden till (**) är lika med unionen av två räta linjer $y_2 = y_1$ och $y_2 = -y_1$. Då är lösningsmängden till ekv $Q(x_1, x_2) = 0$ i x_1, x_2-planet lika med unionen av linjerna $x_2 = \frac{1}{3} \cdot x_1$ och $x_2 = -3x_1$.

6. Betrakta ekv $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$.

(i) Visa att alla lösningar till ekvationen bildar ett underrum V till rummet R^3. (1p).

Svar: Använd kriteriet om underrum till ett vektorrum och kontrollera två villkor:

(1) Anta att vektorerna $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ hör till V d v s $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0$ och $b_1 + 2b_2 - 3b_3 = 0$. Notera att $(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) - 3(a_3 + b_3) = 0$. Så hör vektorn $\overline{a} + \overline{b}$ också till V.

(2) Anta att vektorn $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ hör till V d v s $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0$, och $t \in R$. Notera att $(t \cdot a_1) + 2(a_2 \cdot t) - 3(a_3 \cdot t) = 0$. Det medför att vektorn $t \cdot \overline{a}$ också hör till V. Enligt kriteriet är V ett underrum till R^3.

(ii) Finn en ON bas för underrummet V. (2p).

Svar: Obs att vektorn $\overline{n} = (1, 2, -3)$ är vinkelrät mot planet V. Normera denna $\overline{n_1} = \frac{1}{|\overline{n}|} \cdot \overline{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$.

Notera också att vektorn $\overline{a} = (2, -1, 0)$ tillhör V. Normera denna $\overline{a_1} = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)$.

Betrakta vektorn $\overline{b_1} = \overline{n_1} \times \overline{a_1} = \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot (-3, -6, -5)$.

Notera att $\overline{a_1}$ och $\overline{b_1}$ utgör en ON bas för V.