LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2021-08-23 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 14 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 15 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta ett plan π och två räta linjer L_1, L_2 i rummet:

$$\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \text{ och } L_1 : \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = 2 - t \end{cases}, \ L_2 : \begin{cases} x_1 = -2 + 3t \\ x_2 = 3 - 5t \\ x_3 = -1 + 4t \end{cases}.$$

Linjerna L_1, L_2 har gemensamm punkt A. Låt punkten B vara den ortogonala projektionen av punkten A på planet π. Notera att punkten $C(1, 3, 4)$ hör också till planet π.

(i) Finn punkten A (1p).

Svar: Lös systemet: $\begin{cases} 2 + t = -2 + 3s \\ 1 + 3t = 3 - 5s \\ 2 - t = -1 + 4s \end{cases}$. Man får $t = -1, s = 1$.

Sätt in $t = -1$ i VL eller $s = 1$ i HL för att få A.

$A(1, -2, 3)$.

(ii) Finn punkten B (1p).

Svar: Obs att $\overline{n} = (2, 1, -1)$ är en normal vektor till planet, $\overline{AC} = C - A = (0, 5, 1)$, $\overline{AB} = pr_{\overline{n}}\overline{AC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2} \cdot \overline{n} = \frac{2}{3}(2, 1, -1)$ och $B = \overline{AB} + A$.

$B(\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

(iii) I triangeln ΔABC bestäm $\cos A$ samt triangelns area (1p).

Svar: $\cos A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{2}{\sqrt{39}}$ och

arean $= \frac{|\overline{AC} \times \overline{AB}|}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{35}$

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) Finn determinanten av A.

Svar: $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = -1.$

(ii) Bestäm inversen A^{-1} till A (1p).

Svar: Betrakta matrisen $[A|E]$. Använd tillåtna radoperationer för att transformera $[A|E]$ till matrisen $[E|A^{-1}]$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

(iii) Gör kontroll av A^{-1} genom att hitta produkten $A \cdot A^{-1}$ (1p).

Svar: Multiplicera: $A \cdot A^{-1} = E$.

3. (i) Bestäm den räta linje $y = kx + b$ som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$$\begin{array}{rrrrr} x: & -2 & -1 & 0 & 1 \\ y: & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \qquad (2p)$$

Svar: Lös systemet $AX = B$ i minstakvadrat mening, där $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $X = \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix}$.

Använd normalekvationerna: $(A^t A)X = A^t B$. Man får

$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{13}{10} \end{pmatrix}.$

$y = \frac{3}{5}x + \frac{13}{10}.$

(ii) Rita figur med *punkterna* och *linjen.* (1p).

4. Betrakta ekv $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0.$

(i) Visa att alla lösningar till ekvationen bildar ett underrum V till rummet R^3. (1p).

Tips: Använd kriteriet

Svar: Använd kriteriet om underrum till ett vektorrum och kontrollera två villkor:

(1) Anta att vektorerna $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ hör till V d v s $a_1 - 3a_2 + 5a_3 = 0$ och $b_1 - 3b_2 + 5b_3 = 0$. Notera att $(a_1 + b_1) - 3(a_2 + b_2) + 5(a_3 + b_3) = 0$. Så hör vektorn $\overline{a} + \overline{b}$ också till V.

(2) Anta att vektorn $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ hör till V d v s $a_1 - 3a_2 + 5a_3 = 0$, och $t \in R$. Notera att $(t \cdot a_1) - 3(a_2 \cdot t) + 5(a_3 \cdot t) = 0$. Det medför att vektorn $t \cdot \overline{a}$ också hör till V. Enligt kriteriet är V ett underrum till R^3.

(ii) Finn en bas för underrummet V bestående av ortogonala enhetsvektorer. (2p).

Svar: Obs att vektorn $\overline{n} = (1, -3, 5)$ är vinkelrät mot planet V.

Notera också att vektorn $\overline{a} = (3, 1, 0)$ tillhör V. Normera denna $\overline{a_1} = \frac{1}{|\overline{a}|} \cdot \overline{a} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1, 0)$.

Betrakta vektorn $\overline{b} = \overline{a} \times \overline{n} = 5 \cdot (1, -3, -2)$. Normera denna: $\overline{b_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -3, -2)$

Obs att $\overline{a_1}$ och $\overline{b_1}$ är en bas för V bestående av ortogonala enhetsvektorer.

5. Låt

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + 2b_{k-1} \\ b_k = 3a_{k-1} + 2b_{k-1} \end{cases}$$

Finn a_{45} och b_{45} om $a_1 = 1$ och $b_1 = -4$ (3p)

Tips: Skriv om problemet på matrisform och tänk på diagonalisering.

Svar: obs att $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Notera att $A = PDP^{-1}$, där $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Så är $\begin{pmatrix} a_{45} \\ b_{45} \end{pmatrix} = A^{44} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = PD^{44}P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 \cdot 4^{44} + 11 \\ -9 \cdot 4^{44} - 11 \end{pmatrix}$

6. (i) Avgör karaktär av den här kvadratiska formen $Q(\overline{x}) = -3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$ (1p).

Svar: Obs att egenvärdena är ± 5. Så är Q indefinit.

(ii) Sök maximum och minimum av $Q(\overline{x})$ under bivillkoret $|\overline{x}| = 3$ (1p).

Svar: $\max_{|\overline{x}|=3} Q = 5 \cdot 3^2 = 45$ och $\min_{|\overline{x}|=3} Q = -5 \cdot 3^2 = -45$

(iii) Ange de $\overline{x}$ på vilka restriktionen av Q på cirkeln $|\overline{x}| = 3$ antar minsta värde. (1p)

Svar: Notera att egenvektorer som svarar mot -5 är

$t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$. Välj dem som har längd 3. $\pm\frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$